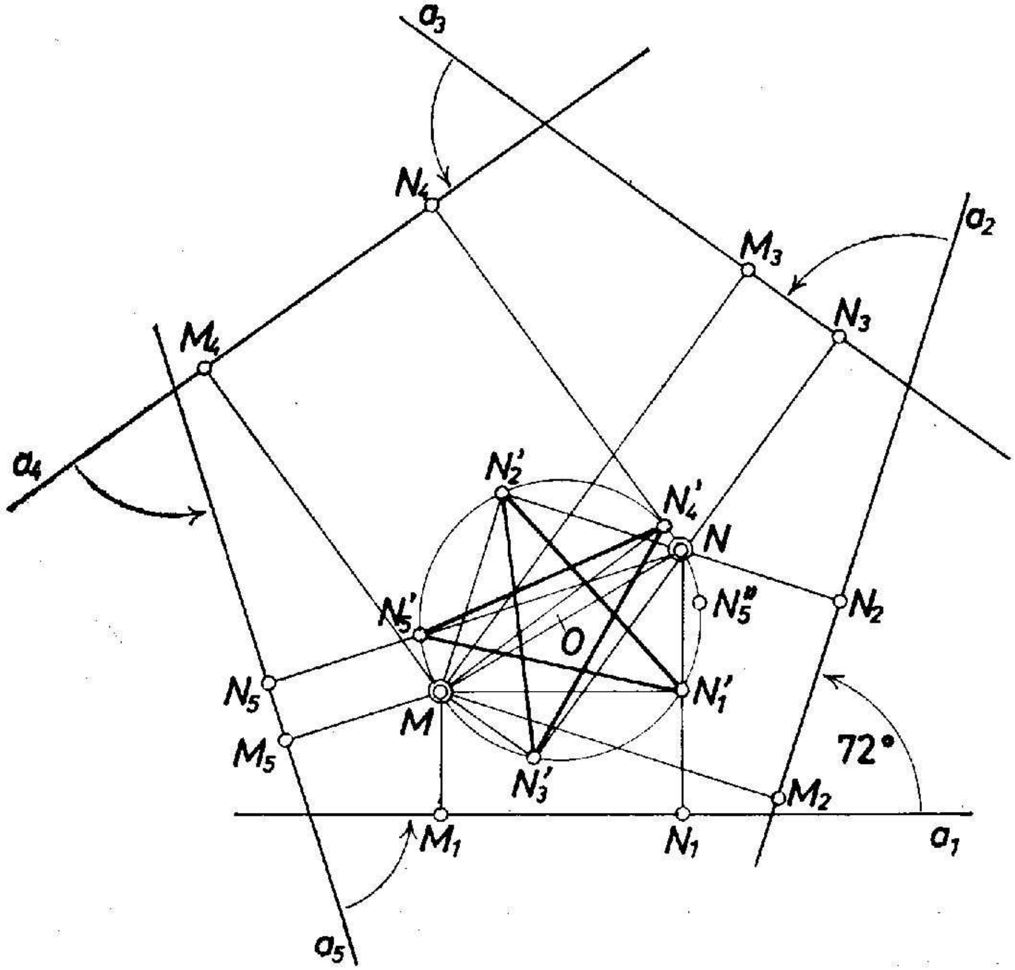
I. megoldás. Toljuk el mindegyik $\overrightarrow{M_iN_i}$-t kezdőpontjánál fogva M-be, az $\overrightarrow{MN'}_i$ helyzetbe. Mindegyik N_i' végpont rajta van az MN átmérőjű k Thalész-körön, hiszen $MN_i' \parallel M_iN_i \perp NN_i$, illetve akkor is, ha az $MM_iN_iN_i'$ derékszögű négyszög valamelyik oldala 0.

Továbbá az $N_i'MN_{i+1}'$ és $N_5'MN_1'$ irányított szögek értéke 72° vagy $72^\circ+180^\circ$, amekkora forgás a_i-t a_{i+1}-be, illetve a_5-öt a_1-be átviszi ($i=1,\,2,\,3,\,4$).



Ezekből a kerületi és középponti szögek összefüggése alapján adódik, hogy az $N_i'ON_{i+1}'$ és $N_5'ON_1'$ irányított szögek értéke $2\cdot 72=144^\circ$ $(+360^\circ)$, ahol O a k középpontja, tehát $N_1'N_2'N_3'N_4'N_5'$ a k-ba írt szabályos csillagötszög (körüljárási iránya egyező az a_1, a_2, ... oldalegyenesek körüljárásával), más szóval $N_1'N_4'N_2'N_5'N_3'$ a k-ba írt konvex szabályos ötszög. Ezekkel az állítás bal oldalából, egymás utáni alakításokkal

$$
\begin{aligned}
&2\big(\overrightarrow{M_1N_1}+\overrightarrow{M_2N_2}+\overrightarrow{M_3N_3}+\overrightarrow{M_4N_4}+\overrightarrow{M_5N_5}\big)=\\
&=2\big(\overrightarrow{MN_1'}+\overrightarrow{MN_2'}+\overrightarrow{MN_3'}+\overrightarrow{MN_4'}+\overrightarrow{MN_5'}\big)=\\
&=2\big(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON_1'}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{ON_2'}+\overrightarrow{3MO}+\overrightarrow{ON_3'}+\overrightarrow{ON_4'}+\overrightarrow{ON_5'}=\\
&=10\cdot\overrightarrow{MO}+2\big(\underbrace{\overrightarrow{ON_1'}+\overrightarrow{ON_2'}}+\underbrace{\overrightarrow{ON_3'}+\overrightarrow{ON_4'}}+\overrightarrow{ON_5'}\big)=5\overrightarrow{MN}
\end{aligned}
$$

– ahogy a feladat állítja – ugyanis az utolsó zárójelben álló összeg 2–2 tagját összeadva

$$\overrightarrow{OP_{12}}+\overrightarrow{OP_{34}}+\overrightarrow{ON_5'}=\overrightarrow{ON_5''}+\overrightarrow{ON_5'}=0,$$

ahol P_{12} az ON_4' szakaszon, P_{34} az ON_1'-n van, $N_2P_{12}\parallel ON_1'$ és $N_3'P_{34}\parallel ON'_4$, végül N_5'' a rövidebbik $N_1'N_4'$ körív felezőpontja, vagyis k-nak az N_5'-vel átellenes pontja, hiszen itt metszi egymást $N_2'P_{12}$ és $N_3'P_{34}$. **K. L.**

II. megoldás. Válasszuk a koordináta-rendszer x tengelyéül a_5-öt, ekkor az a_i egyenes irányszöge $i\cdot 72^\circ$. Legyen másrészt az MN félegyenes irányszöge φ, ekkor a vetületek előjellel vett hosszai

$$M_iN_i=MN\cos(\varphi-i\cdot 72^\circ),$$

ha a_i-n pozitívnak vesszük az a_{i-1}-gyel való metszésponttól az a_{i+1}-gyel való metszéspont felé mutató irányt.

Bontsuk mindegyik $\overrightarrow{M_iN_i}$-t a_5 irányú és rá merőleges komponensekre, és összegezzük külön-külön a komponenseket. Alkalmazni fogjuk a következő két azonosságot :

$$2\cos u\cos v=\cos(u-v)+\cos(u+v),$$
$$2\cos u\sin v=\sin(u+v)-\sin(u-v).$$

Az állítás bal oldalán álló összeg a_5 irányú komponense

$$2\sum_{i=1}^{5}\overrightarrow{M_iN_i}\cos i\cdot 72^\circ=\overrightarrow{MN}\sum_{i=1}^{5}\cos(\varphi-i\cdot 72^\circ)\cos i\ 72^\circ=$$
$$=\overrightarrow{MN}\sum_{i=1}^{5}\cos(\varphi-i\cdot 144^\circ)+5\overrightarrow{MN}\cos\varphi.$$

Itt a második tag az állítás jobb oldalán álló vektor vetülete, az első kifejezés értéke pedig 0, ugyanis az addíciótétel szerint

$$\cos\varphi\sum_{i=1}^{5}\cos i\cdot 144^\circ+\sin\varphi\sum_{i=1}^{5}\sin i\cdot 144^\circ,$$

és az újabb összegek értéke külön-külön is 0, hiszen $576^\circ=720^\circ-144^\circ$ és $432^\circ=720^\circ-288^\circ$,

$$2\cos 144^\circ+2\cos 288^\circ+\cos 0^\circ=2\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)+1=0,$$

illetve $\pm\sin 144^\circ\pm\sin 288^\circ+\sin 0^\circ=0$.

A bal oldali összegnek a_5-re merőleges összetevője pedig hasonlóan

$$2\sum_{i=1}^{5}\overrightarrow{M_iN_i}\sin i\cdot 72^\circ=5\overrightarrow{MN}\sin\varphi-\overrightarrow{MN}\sum_{i=1}^{5}\sin(\varphi-i\cdot 144^\circ),$$

és itt a második kifejezés 0.

Az állítás két oldalának két, egymásra merőleges irányú komponensei megegyeznek. Ezzel bebizonyítottuk az állítás helyességét.

Megjegyzés. Ha rögzítjük M-et és belátjuk az állítást két alkalmasan választott N-re, akkor az állítás a rögzített M mellett abból következik, hogy most már az MN vektor felbontható a már megvizsgált két MN vektor lineáris kombinációjára, és az állításban szereplő lépéseken könnyű végigkövetni e felbontás hatását. Végül M rögzített voltától úgy szabadulhatunk meg, hogy a tetszőleges MN vektort az M_0N és M_0M vektorok különbségeként állítjuk elő, ahol M_0 a rögzített vektor. Elég tehát az állítást arra az esetre belátni, ha MN például az ötszög egyik oldala, átlója, vagy a centrumból valamelyik csúcsig futó szakasz.