(1) $$xy+xz=10, \qquad yz+yu=6, \qquad zu+zx=2, \qquad ux+uy=-2.$$

I. megoldás. A két szélső egyenlet összegéből a két középső összegét levonva azt kapjuk, hogy $(x-z)(y+u)=0$. Így tehát vagy $x=z$ vagy $y=-u$. Továbbá ha ezek bármelyike, és az (1) egyenletrendszer első három egyenlete is teljesül, akkor teljesül a negyedik is.

Az első esetben helyettesítsünk az első három egyenletben z helyébe x-et. Mindjárt szorzattá alakítva

(2) $$x(x+y)=10, \quad y(u+x)=6, \quad x(u+x)=2.$$

A második és harmadik összefüggés szerint $y=3x$ (hiszen $u+x$ nem lehet 0), ezért (2) első egyenletébe helyettesítve $x^2=10/4$, ahonnan- a gyökök ($u=-x+2/x$ és $z=x$ alapján)

x	y	z	u
$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\frac{3\sqrt{10}}{2}$	$\frac{\sqrt{10}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{10}}$
$-\frac{\sqrt{10}}{2}$	$-\frac{3\sqrt{10}}{2}$	$-\frac{\sqrt{10}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{10}}$

Ezek előbbi megjegyzésünk értelmében megoldásai (1)-nek, hiszen (2)-ben mindhárom egyenlet teljesül.

A második esetben $y=-u$. Írjunk tehát (1)-ben u helyett $(-y)$-t:

(3) $$xy+xz=10; \quad yz-y^2=6, \quad -yz+xz=2.$$

A (3) második egyenletéből z-t, az elsőből x-et kifejezzük y segítségével:

(4) $$z=\frac{6+y^2}{y}, \quad x=\frac{10}{y+z}=\frac{10}{y+(6+y^2)/y}=\frac{5y}{3+y^2}.$$

Ha tehát z-t, illetve x-et így választjuk, akkor (3)-ban az első két egyenlet biztosan teljesül. Ahhoz, hogy a harmadik is teljesüljön, y-t úgy kell választanunk, hogy

$$-y\cdot\frac{6+y^2}{y}+\frac{5y}{3+y^2}\cdot\frac{6+y^2}{y}=2,$$

azaz $y^4+6y^2-6=0$ is igaz legyen. Ezt megoldva (csak a valós megoldásokat tekintve) kapjuk a további gyököket, melyek – az előzőkhöz hasonlóan láthatóan – (1)-nek is megoldásai:

x	y	z	u
$\frac{5\sqrt{-3+\sqrt{15}}}{\sqrt{15}}$	$\sqrt{-3+\sqrt{15}}$	$\frac{3+\sqrt{15}}{\sqrt{-3+\sqrt{15}}}$	$-\sqrt{-3+\sqrt{15}}$
$-\frac{5\sqrt{-3+\sqrt{15}}}{\sqrt{15}}$	$-\sqrt{-3+\sqrt{15}}$	$-\frac{3+\sqrt{15}}{\sqrt{-3+\sqrt{15}}}$	$\sqrt{-3+\sqrt{15}}$

Az egyenletrendszernek tehát a fent felsorolt négy megoldása van.

Megyesi Gábor (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., I. o. t.)

II. megoldás. Ha az (1) egyenletek jobb oldalait a, b, c, d-vel jelöljük, továbbá bevezetjük az $xz=A$, $uy=B$ jelöléseket, az egyenletrendszer a következőképpen alakul:

$$xy=a-A, \quad yz=b-B, \quad zu=c-A, \quad ux=d-B.$$

Ebből

(5) $$(a-A)(c-A)=AB, \qquad (b-B)(d-B)=AB.$$

Ha (5) első egyenletéből B-t kifejezzük, és behelyettesítjük a másodikba, akkor átrendezés után azt kapjuk, hogy

(6) $$\begin{gathered}(a+b+c+d)A^3-\big(ab+ac+ad+bc+bd+cd+(a+c)^2\big)A^2+\\+ac(2a+b+2c+d)A-a^2c^2=0.\end{gathered}$$

Ennek megoldásait ismerve az eredeti (1) egyenletrendszert már könnyen megoldhatjuk: (5) első egyenletéből B értékét kapjuk, s ezzel az $xy,\ yz,\ xu$ stb. kettős szorzatok értékét is tudjuk. Ezekből például x^2 a következőképpen kapható:

$$x^2 = \frac{xy \cdot xz}{yz} = \frac{(a-A)A}{b-B}.$$

Esetünkben $a = 10,\ b = 6,\ c = 2,\ d = -2$, tehát a (6) egyenlet a következőképpen alakul:

$$16A^3 - 200A^2 + 560A - 400 = 0.$$

Szerencsénkre ennek bal oldala szorzattá alakítható:

$$8(2A-5)(A^2 - 10A + 10) = 0,$$

ahonnan A lehetséges értékei $5/2,\ 5-\sqrt{15},\ 5+\sqrt{15}$. Ezekből a már felírt megoldásokat kapjuk meg.