Lássuk be először, hogy A_2 igaz. Legyenek a számaink a és b, számtani és mértani közepüknek hányadosa, k egész szám. Az

$$\frac{a+b}{2} : \sqrt{ab} = k$$

feltételt kissé más alakba írva

$$k^2(a-b)^2 = (k^2-1)(a+b)^2. \tag{1}$$

A bal oldalon egy egész szám négyzete áll, tehát a jobb oldalnak, és így (k^2-1)-nek is teljes négyzetnek kell lennie. Ez azonban csak $k=1$ esetén teljesül, tehát (1) mindkét oldalának értéke 0, ahonnan $a=b$.

Az $n>2$ esetekben A_n hamis voltát úgy látjuk be, hogy keresünk olyan $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ pozitív egészeket, melyek nem mind egyenlőek, és melyekre a

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n\ \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}} \tag{2}$$

hányados értéke egész.

Ha $n>2$ és páros, akkor az

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 1 \qquad \text{és} \qquad a_n = (n-1)^n$$

választás megfelel. Ez esetben ugyanis nyilván $a_n \neq 1$ és (2) értéke

$$\frac{(n-1)+(n-1)^n}{n\cdot(n-1)} = \frac{(n-1)^{n-1}+1}{n}$$

ami egész, mivel a kitevő páratlan, tehát a számláló osztható $(n-1)+1=n$-nel.

Ha pedig $n>2$ páratlan, akkor legyen

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-2} = 1, \qquad a_{n-1} = (n-2)(n-1)^n \qquad \text{és} \qquad a_n = (n-2)^{n-1}n^n.$$

Ebben az esetben is $a_n \neq 1$ és (2) értéke

$$\frac{(n-2)+(n-2)(n-1)^n+(n-2)^{n-1}n^n}{n\cdot(n-2)(n-1)n} = \frac{1+(n-1)^n+(n-2)^{n-2}n^n}{n^2(n-1)}. \tag{3}$$

Elegendő megmutatnuk, hogy a jobb oldalon szereplő hányados számlálója külön-külön osztható $(n-1)$-gyel és n^2-tel is, hiszen $(n-1)$ és n^2 relatív prímek, és így ebből már következik, hogy (3) értéke egész. Ha ezt a számlálót az

$$\big((n-2)^{n-2}+1\big)n^n - (n^n-1) + (n-1)^n$$

alakba írjuk, akkor láthatóan mindhárom tag, tehát összegük is osztható $(n-1)$-gyel. Végül az n^2-tel való oszthatósághoz $n>2$ miatt elegendő megmutatnunk, hogy

$$1+(n-1)^n = (1+(n-1))\cdot[(n-1)^{n-1}-(n-1)^{n-2}+\ldots-(n-1)+1]$$

osztható n^2-tel. A szorzat első tényezője éppen n. A második tényezőben az összeadandók n-nel osztva $+1$ vagy -1 maradékot adnak attól függően, hogy $(n-1)$ kitevője páros vagy páratlan. Ezeket a maradékokat váltakozó előjellel összeadva éppen n-et kapunk, tehát a második tényező is osztható n-nel.

Ezzel megmutattuk, hogy a (3) hányados értéke egész, s így a feladat állítását is beláttuk.

Drávucz Katalin (Szolnok, Verseghy F. Gimn., N. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Ez a feladat nehéznek bizonyult. Érdekes, hogy a jó megoldók közül is soknak beletörött a bicskája. Közülük ezt sokan el is ismerték, de akadtak olyanok is, akik – miután páros n-re megadták a jó ellenpéldát – kijelentették, hogy páratlan n-re hasonló a helyzet.