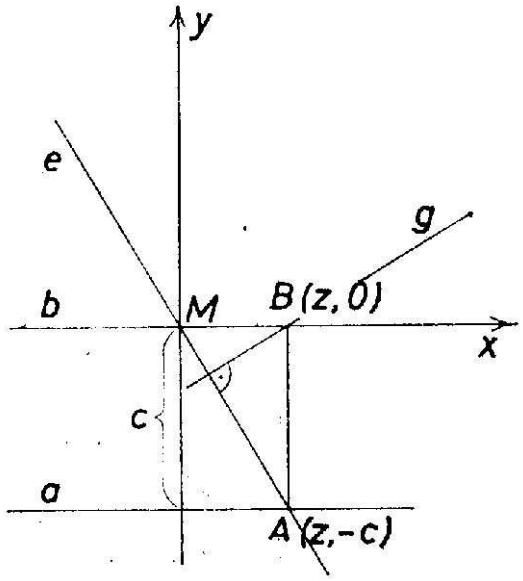
I. megoldás. Ha az állítás érvényes a b egyenesre, akkor tetszőleges, b-vel párhuzamos b' egyenesre is igaz. Ugyanis a b-t b'-be vivő, rájuk merőleges eltolásvektor jellemzi a B eltolódását is, a kérdéses g egyenesét is, a forgó e egyenes minden helyzetében (hacsak A létrejön), tehát a g egyenessereggel együtt a feladat állításában szereplő parabola is ugyanúgy tolódik el.

Vehetjük tehát b helyére a vele párhuzamos, M-en átmenő egyenest, tovább az egyszerűség kedvéért ezt jelöljük b-vel. És vegyük mindjárt ezt derékszögű koordinátarendszerünk első tengelyéül, origójául M-et, és]egyen az a egyenes egyenlete $y = -c$, ahol $c > 0$.



Jellemezzük e helyzetét az a-n futó $A(z, -c)$ pontjával, ahol z paraméter. Nem jön létre A, B és g, ha $e \parallel a$, ha pedig $e \perp a$, azaz $z = 0$, akkor g azonos b-vel, hiszen ekkor $B = M$. Minden más esetben e és g iránytangense $-c/z$, ill. z/c, a B pont helyzete $(z, 0)$, ezekből g egyenlete

$$\frac{y}{x-z} = \frac{z}{c}, \qquad y = \frac{z}{c}\,x - \frac{z^2}{c}. \tag{1}$$

Ebben az eredményben benne van az előre elintézett $z = 0$ eset is.

A kapott egyenlet pedig azonos az $y = \dfrac{x^2}{4c}$ parabolához a $\left(2z,\ \dfrac{z^2}{c}\right)$ pontjában húzott érintő egyenletével. Ugyanis az érintő iránytangense deriválás útján bármely x_0 pontban $\dfrac{x_0}{2c}$, tehát egyenlete

$$\frac{y - \dfrac{x_0^2}{4c}}{x - x_0} = \frac{x_0}{2c},$$

ill. $x_0 = 2z$ mellett

$$\frac{y - \dfrac{z^2}{c}}{y - 2z} = \frac{z}{c},$$

átrendezve valóban azonos (1)-gyel.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

A $c > 0$ kikötés nem volt lényeges, csak a szemléletesség, az ábrával való egyezés kedvéért alkalmaztuk; a feladat szerint mindenesetre $c \neq 0$.

II. megoldás. Előkészítésül fel fogjuk használni a parabola következő tulajdonságát. Legyen a parabola tengelye t, csúcsa C, az itt húzott érintője c, továbbá egy tetszőleges P pontjához tartozó érintőjének c-vel, t-vel való metszéspontja Q, ill. R, ekkor Q felezi a PR szakaszt. Ekvivalens ezzel, hogy Q felezi a CP' szakaszt, ahol P' a P-nek c-n levő vetülete.

Jelöljük t^*-gal az M-en átmenő, a-ra merőleges egyenest. Erre tengelyesen szimmetrikus a kiindulási a, b, M alakzat, és ezért t^* a forgó e egyenesből leszármaztatott g egyenesek seregének is szimmetriatengelye, tehát az állítás szerinti parabola tengelye csak t^* lehet. (Ha ugyanis e-nek e_1 és e_2 helyzetei egymás képei t^*-ra, akkor ugyanez áll a megfelelő A_1- és A_2-re, B_1- és B_2-re, MA_1-re és MA_2-re, tehát g_1 és g_2-re is.) Tovább t^* helyett a t jelet írjuk.

Jelöljük t-nek a-n, b-n levő pontját S-sel, T-vel, a T-nek B-re való tükörképét T'-vel, továbbá P-vel a g-nek azt a pontját, amelyre PT' merőleges b-re. Belátjuk, hogy P mértani helye egy parabola. (P létezik, ha g létrejött.)

Szerkesztésünk alapján BPT' és MAS hasonló (derékszögű) háromszögek, ebből

$$PT' = \frac{BT'}{MS} \cdot AS = \frac{TT'^2}{4MS}, \tag{2}$$

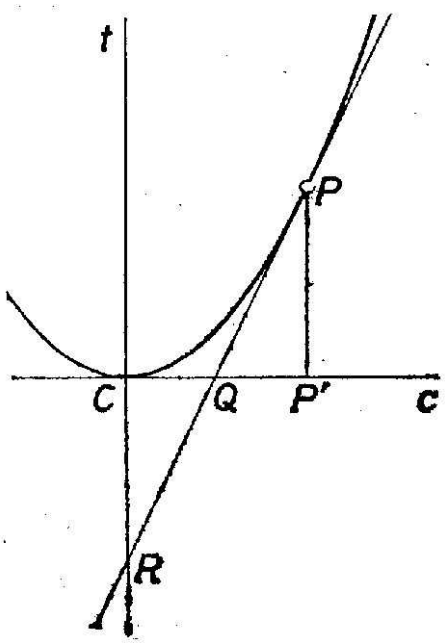
hiszen $AS = BT = BT' = TT'/2$. Ha pedig speciálisan e merőleges a-ra, vagyis azonos t-vel, akkor $A = S$, $B = T$, $g = b$ és $P = T$, tehát (2) érvényes erre az esetre is.

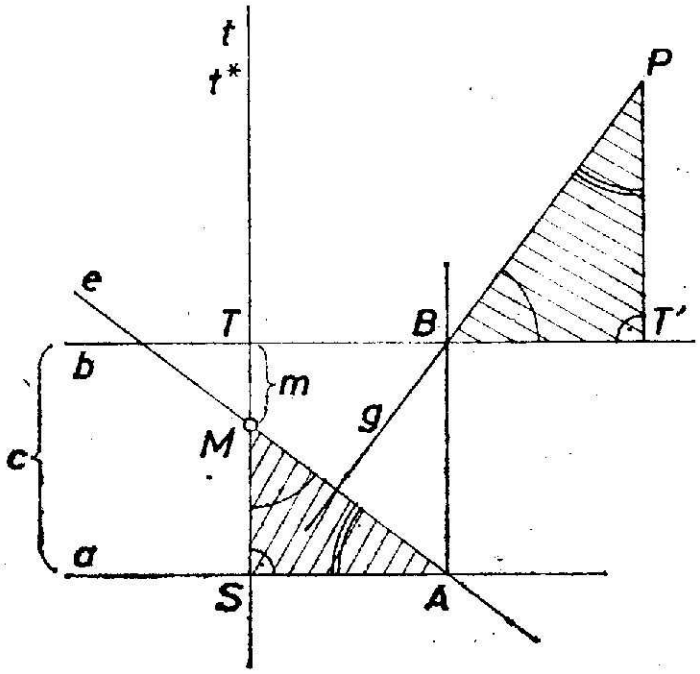
A b, t egyenespárt a derékszögű koordináta–rendszer első, ill. második tengelyének véve (2) így alakul:

$$y = \frac{x^2}{4MS}, \tag{2a}$$

ami valóban parabola egyenlete.

Azt kell még belátnunk az állítás igazolásához, hogy a (2a) parabolához P-ben fektetett érintő éppen a felhasznált g egyenes.





Mivel a parabola tengelye az ST egyenes, s tengelypontja a T pont, azért ez az érintő – közismerten – átmegy TT' felezőpontján, azaz a B ponton. Ám a g egyenes is ilyen, hiszen úgy vettük fel, hogy átmenjen B ponton, és a P pontot rajta vettük fel. Így – mivel a P pontban a parabolához csak egy érintő húzható, s ennek tulajdonságaival a g egyenes rendelkezik, ezért a fent megadott parabolát a g minden P esetén a P pontban érinti. És bármely g ugyanazt a fent megadott parabolát érinti, mivel a parabola adatai az e egyenestől – és így a P ponttól – függetlenek.