Írjuk fel csökkenő sorrendben egymás után a tízes számrendszer tíz számjegyét, és a kapott együttest írjuk le tízszer egymás után. Száz jegyű számot kapunk, amelyben tetszőleges, legfeljebb tíz jegyű A szám számjegyei kijelölhetőek A-beli sorrendjükben. Valóban, A első számjegyét biztosan megtaláljuk az általunk felírt B szám első tíz jegye között, hiszen ott az összes számjegyet felsoroltuk. Majd A második, harmadik, általában a k-adik számjegyét ugyancsak kijelölhetjük a számunk második, harmadik, k-adik tíz számjegyből álló blokkjában, hiszen ezek mindegyikében külön–külön minden számjegy megtalálható. Így ha k értékét egytől A jegyeinek a számáig növeljük, közben A összes számjegyét kijelöljük, mégpedig pontosan abban a sorrendben, ahogy A-ban követik egymást. Mivel egy csupa különböző számjegyből álló szám legfeljebb tíz jegyű, ezzel beláttuk, hogy az általunk felírt B szám univerzális.

Legyen most B tetszőleges univerzális szám. Mivel B univerzális, minden számjegynek elő kell fordulnia benne. Vegyük sorra B számjegyeit az első számjegyen kezdve mindaddig, amíg minden 0-tól különböző számjegy legalább egyszer elő nem fordul köztük. Jelöljük a legutoljára elénk kerülő számjegyet s_1-gyel, és legyen ez B-nek mondjuk j_1-edik számjegye. Mivel B első (j_1-1) számjegye között minden 0-tól és s_1-től különböző számjegy legalább egyszer előfordul, $j_1 \geq 9$. Menjünk tovább B számjegyein, addig, amíg minden s_1-től különböző számjegy legalább egyszer elő nem fordul. Jelöljük az utoljára elénk kerülő számjegyet s_2-vel, és legyen ez B-nek j_2-edik számjegye. Általában, ha már kijelöltük B j_1-edik, j_2-edik, $\ldots$, j_k-adik számjegyét, és ezek értéke rendre s_1, s_2, $\ldots$, s_k volt, akkor $B\,(j_k+1)$-edik számjegyén kezdve menjünk el B számjegyein addig, amíg minden, az s_1, s_2, $\ldots$, s_k számjegyektől különböző számjegy legalább egyszer elő nem fordul. Legyen s_{k+i} az utoljára elénk kerülő számjegy, és legyen ez B-nek j_{k+1}-edik számjegye.

Az eljárásunk egyszer biztosan véget ér, hiszen a különböző számjegyek száma is és B számjegyeinek a száma is véges. Legyen a kapott számjegyek száma m, akkor egyrészt $m \leq 10$, másrészt tetszőleges $1 < k \leq m$ mellett $j_k > j_{k-1} + (10-k)$, hiszen j_{k-1} után j_k-ig $(10-k)$-nál többféle számjegynek kell állnia. Ha $m = 10$, ebből $j_1 \geq 9$ alapján $j_{10} \geq 54$ következik, hiszen

$$j_{10} = j_1 + (j_2 - j_1) + \ldots + (j_{10} - j_9) \geq 9 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 54.$$

Megmutatjuk, hogy ha $m = 10$ és $j_{10} = 54$, vagy ha $m < 10$, akkor B nem lehet univerzális. Az első esetben ugyanis a pontos egyenlőségek miatt a fenti konstrukcióval előállított blokkokban minden keresett számjegy pontosan egyszer fordul elő, és amit nem keresünk, az nem is fordulhat elő. Így például s_1 egyáltalán nem fordul elő B-ben, csak a j_1-edik helyen. Ha tehát A első számjegyének $B\,(j_1-1)$-edik számjegyét választjuk, majd A második számjegyének tetszőleges, ettől és s_1-től különböző számjegyet választunk, és végül a harmadik számjegyének az s_1-et választjuk, akkor A nyilván nem állítható elő B-ből néhány számjegy elhagyásával.

Ha tehát $m = 10$, és B univerzális, akkor $j_{10} > 54$, vagyis B-nek valóban legalább 55 számjegye van. Így készen vagyunk a feladat állításának a bizonyításával, és belátjuk, hogy ha $m < 10$, akkor B nem lehet univerzális. Legyenek ekkor ugyanis s_1, s_2, $\ldots$, s_m a B-ből a fenti eljárással előállított számjegyek, és legyen s_{m+1}, $\ldots$, s_{10} a tőlük különböző többi szám jegy tetszőleges sorrendben. Legyenek A számjegyei az s_1, $\ldots$, s_{10} számjegyek ebben a sorrendben. Megmutatjuk, hogy A nem állítható elő B-ből.

Tegyük fel állításunkkal ellentétben, hogy A számjegyei a kívánt sorrendben megtalálhatóak B-ben, és legyen mondjuk s_i a $B\,b_i$-edik számjegye. Mivel s_1 a B-ben először a j_1-edik helyen fordul elő, $b_1 \geq j_1$. Belátjuk, hogy tetszőleges $k \leq m$ mellett $b_k \geq j_k$. Ha ugyanis ez nem volna így, válasszuk k-nak azt a legkisebb indexet, amelyre $b_k < j_k$. Akkor $b_{k-1} \geq j_{k-1}$, tehát A elképzelt előállításában s_{k-1}-et vagy $B\,j_{k-1}$-edik jegyeként, vagy azután jelöljük ki. Akkor viszont nem találhatjuk meg B-ben ezután, de még j_k előtt s_k-t, hiszen a konstrukciónk szerint j_{k-1} után B első s_k-val egyenlő számjegye a j_k-adik volt. Tehát $b_m \geq j_m$, de m definíciója szerint B-ben a j_m-edik számjegy után nem fordulhat elő az összes, az s_1, s_2, $\ldots$, s_m számjegyektől különböző számjegy.

Megjegyzés. Belátható az is, hogy egy univerzális szám legalább 69 jegyű, és hogy az alábbi 89 jegyű szám univerzális:

$$*7890*8798*0789\#7890*8798*0789\#7890\ 987*$$

Itt a $*$ az 123456, # pedig a 65432123456 számjegysorozatot jelöli. Nem tudjuk, hány jegyből áll a legkisebb univerzális szám.