Legyen k olyan pozitív egész, amelyre $k^2+2k\ge n$. Felhasználva, hogy az x_1, x_2, $\dots$ pozitív tagú sorozat, s tagjai monoton csökkennek, (2) bal oldala legfeljebb.

$$x_1\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+x_4\left(\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{8}\right)+\ldots+x_{k^2}\left(\frac{1}{k^2}+\ldots+\frac{1}{k^2+2k}\right)=$$
$$=\frac{x_1}{1}f(1)+\frac{x_4}{2}f(2)+\ldots+\frac{x_{k^2}}{k}f(k),$$

ahol

(3)
$$f(i)=i\left(\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^2+1}+\ldots+\frac{1}{i^2+2i}\right).$$

Megmutatjuk, hogy $f(i)<2$ minden pozitív egész i-re, ebből (1) alapján azonnal adódik, hogy

(4)
$$\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\ldots+\frac{x_n}{n}<2.$$

Az $f(i)<2$ egyenlőtlenséget bizonyítandó, (3) jobb oldalán a zárójelben álló kifejezést osszuk két részre. A $(2i+1)$ összeadandó közül az első i darabot helyettesítsük $1/i^2$-tel, a többi $(i+1)$-et pedig $1/(i^2+i)$-vel. Ezzel $f(i)$-nél nagyobb számot kapunk, tehát

$$f(i)<i\left(i\frac{1}{i^2}+(i+1)\frac{1}{i^2+i}\right)=2,$$

ahogyan állítottuk. Ezzel (4)-et és így a feladat állítását is igazoltuk. **(K. M.)**

Csere Kálmán (Veszprém, Lovassy L. Gimn.. IV. o. t.)

Megjegyzés. Bizonyítottuk, hogy a (2) egyenlőtlenség jobb oldalán 3 helyett 2-t írva a feladat állítása igaz marad. Megmutatjuk, hogy 2-nél kisebb számokra (2) már nem feltétlenül teljesül. Láttuk ugyanis, hogy $f(i)<2$, másrészt $f(i)=$
$=i\left(\frac{1}{i^2}+\ldots+\frac{1}{i^2+2i}\right)>i\,\frac{2i+1}{i^2+2i}>2-\frac{3}{i}$. Most az x_1, x_2, $\dots$, x_{k^2+2k} értékeket mind az $(1/1+1/2+\ldots+1/k)$ szám reciprokának választjuk, és legyen $x_i=0$, ha $i>k^2+2k$. Itt k egy később megválasztandó pozitív egészt jelöl. Az (1)-beli egyenlőtlenségek mind teljesülnek, és (2) bal oldalának értéke az $n=k^2+2k$ helyen éppen

$$A=\frac{x_1}{1}f(1)+\frac{x_4}{2}f(2)+\ldots+\frac{x_{k^2}}{k}f(k)>$$
$$>2\left(\frac{x_1}{1}+\frac{x_4}{2}+\ldots+\frac{x_{k^2}}{k}\right)-3\left(\frac{x_1}{1^2}+\frac{x_2}{2^2}+\ldots+\frac{x_{k^2}}{k^2}\right).$$

Az x_i értékeket úgy választottuk, hogy a különbség első tagja éppen 2 legyen. Felhasználva még, hogy

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{k^2}<1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)<2,$$

kapjuk, hogy $A>2-6\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right)^{-1}$. Ez utóbbi érték pedig minden 2-nél kisebb számnál nagyobb lesz, ha k-t megfelelően választjuk, hiszen a természetes számok reciprokából képzett $1+1/2+\ldots+1/k$ összegek sorozata felülről nem korlátos.

A feladat szövege nem engedi meg, hogy az x_i számok között a 0 is előforduljon. Olvasóinkra bízzuk annak meggondolását, hogyan módosítható bizonyításunk, hogy ennek a többletkövetelménynek is eleget tegyen.