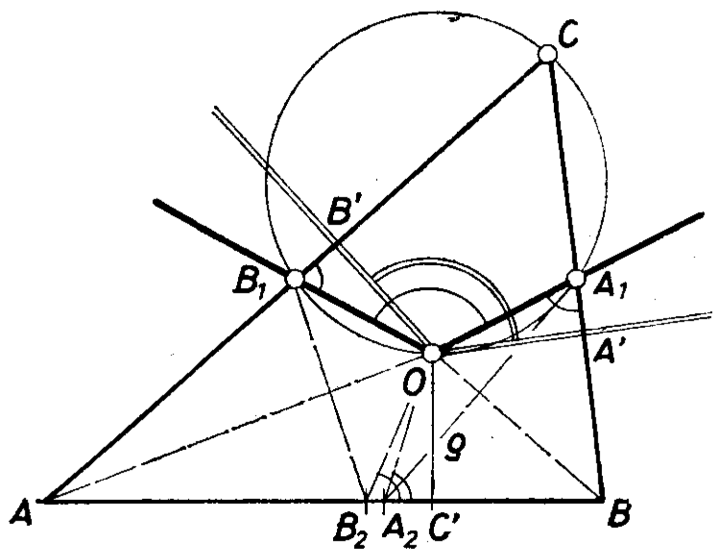
I. megoldás. A vizsgálandó B_1OA_1 szög a háromszög B_1A_1 középvonalának O-ból vett látószöge, és O mindig a B_1A_1 egyenesnek C-t nem tartalmazó partján van, hiszen O-nak az AB oldaltól való ϱ távolsága – a beírt kör sugara – nyilván kisebb, mint a C csúcshoz tartozó magasság fele.



A követelmény jobb oldala egyenlő $180^\circ - ACB\sphericalangle = 180^\circ - \gamma$-val.

Ekkora szöget zárnak be egymással az O-ból a körnek a CA és CB oldalon levő B', ill. A' érintkezési pontjaihoz húzott félegyenesek is, hiszen a $CB'OA'$ négyszögnek két szöge derékszög. Eszerint a B_1OA_1 szögvonal (ti. az egymáshoz képest rögzített OA_1, OB_1 félegyenes-pár) vagy azonos a $B'OA'$ szögvonallal vagy ahhoz képest O körül el van fordulva.

Azonosságuk esetében az eredeti háromszög szabályos, hiszen O egyszersmind a CA, CB oldalak felező merőlegeseinek is közös pontja, tehát $CA = CB = AB$.

Ha viszont $CA \neq AB$, akkor $CA \neq CB$, különben a háromszög egyenlő szárú lenne, A_1 és B_1, valamint A' és B' tükrös pontpár lenne a háromszög CO szimmetriatengelyére és nem teljesülhetne a jelzett elfordult helyzet. Elég a $CA > CB$ nagyságviszony mellett keresnünk a követelmény teljesülését. Ekkor egyszersmind $CB_1 > CA_1$, pontosabban $CB_1 > CB' = CA' > CA_1$.

Az $A_1OB_1\sphericalangle = A'OB'\sphericalangle$ egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha a két tartomány nem közös részei egyenlők: $B_1OB'\sphericalangle = A_1OA'\sphericalangle$. Ekkor az OB' és OA' sugarakra támaszkodó derékszögű háromszögek egybevágók, tehát $B_1B' = A_1A'$, és folytatólag a kör érintőszakaszainak egyenlősége alapján

$$CB_1 + CA_1 = \frac{a+b}{2} = (CB' + CA') + (B'B_1 - A'A_1) = (CA - AB') + (CB - BA') =$$
$$= b + a - (AC' + BC') = a + b - c,$$

vagyis

$$c = \frac{a+b}{2}, \quad AB = \frac{CA + CB}{2}. \tag{1}$$

Ez a feltétel nemcsak szükséges, hanem elegendő is, hiszen a gondolatmenet megfordítható. Tehát a keresett feltétel: a háromszög oldalai számtani sorozatot alkossanak úgy, hogy a nagyságra nézve középső oldal AB.

Természetesen odaértendő, hogy a háromszög létezzék, így adott $AB = c$ mellett az a, b oldalpárra

$$\frac{c}{2} < b \leqq c, \quad a = 2c - b.$$

Megjegyzés. Érdemes átvinni a talált feltételt a háromszög szögeire. A sinustétel alapján (1) ekvivalens sorra az alábbiakkal:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\gamma = 2\sin(\alpha+\beta),$$

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \quad \left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \neq 0\right),$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2},$$

$$tg\frac{\alpha}{2}tg\frac{\beta}{2} = \frac{1}{3}.$$

II. megoldás. A feladat követelményének az I. megoldás szerinti

$$B_1OA_1\sphericalangle = 180^\circ - B_1CA_1\sphericalangle$$

alakja azt kívánja, hogy CB_1OA_1 húrnégyszög legyen, tehát

$$OB_1C\sphericalangle = 180^\circ - OA_1C\sphericalangle = OA_1B\sphericalangle.$$

Tükrözzük A_1-et OB-re; B_1-et OA-ra. Az A_2, ill. B_2 kép nyilván az AB egyenesen keletkezik, és $OA_2B\sphericalangle = OA_1B\sphericalangle$ illetve $OB_2B\sphericalangle = OB_1C\sphericalangle$, tehát az előbbi egyenlőség alapján A_2-nek és B_2-nek egybe kell esnie. Igy pedig

$$\underline{AB} = AA_2 + A_2B = AB_1 + A_B = \underline{\frac{AC}{2} + \frac{BC}{2}}, \tag{2}$$

szükséges tehát, hogy AB számtani közepe legyen a másik két oldalnak. Fordítva, ha egy háromszögben teljesül (2), akkor legyen A_1-nek BO-ra való tükörképe X. Ekkor X és B_1 egymás képei AO-ra, hiszen $AX = AB - BX = AC/2$. Így pedig

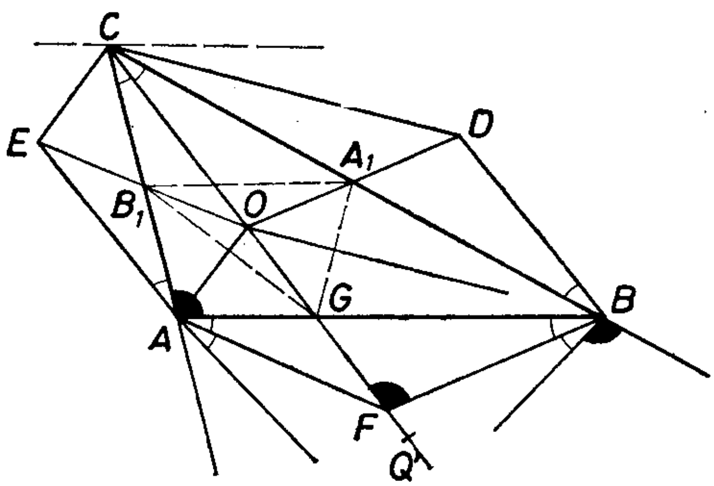
$$OB_1C\sphericalangle = OXB\sphericalangle = OA_1B\sphericalangle = 180^\circ - OA_1C\sphericalangle,$$

vagyis OA_1CB_1 húrnégyszög, és

$$B_1OA_1\sphericalangle = 180^\circ - B_1CA_1\sphericalangle = CAB\sphericalangle + CBA\sphericalangle,$$

ahogy a feladat kívánja. Tehát a (2) feltétel elegendő is.

III. megoldás. Legyen ABC tetszőleges háromszög, és a beírt körének a középpontja O. Tükrözzük O-t a BC, AC oldalak felezőpontjára, és a kapott pontokat jelöljük D-vel, E-vel.



Mérjük fel az AB szakasz végpontjaiban kifelé a C-nél levő szög felét, és az új szárak metszéspontját jelöljük F-fel. Így az ABF háromszög egyenlő szárú lesz, és ha F körül az A-t alkalmas szöggel elforgatjuk, akkor az B-be jut. Tükrözzük az AB egyenest az AF, BF egyenesekre. Ezek az új egyenesek az AB egyenessel együtt úgy vágják három részre az AC, BC egyenesnek a háromszöget tartalmazó oldalán levő 180°-os szögeket, hogy a három darab A-ban és B-ben is az ABC háromszög három szögével egyenlő. Mivel a C-nél levő szög megfelelője mindkét esetben középen van, és a másik kettő ciklikus sorrendjét az F körüli forgatás egymásba viszi, ez a forgatás az AC egyenest a BC egyenesbe viszi. Emiatt F egyenlő távol van ettől a két egyenestől, tehát rajta van a háromszög C-nél levő szögét felező CO egyenesen. Ez az egyenes az ABF háromszög F-nél levő szögét éppen két akkora darabra vágja, mint az ABC háromszög A-nál, B-nél levő szögei, mert például az ABC és a BCF háromszögek B-nél, C-nél levő szögeinek az összege egyenlő, és emiatt az A-nál, illetve F-nél levő szögeik is egyenlőek.

F-ből tehát az AB szakasz épp akkora szög alatt látszik, mint a feladat szerinti háromszögben O-ból az A_1B_1 szakasz. Ez utóbbinak nálunk a DOE szög felel meg, hiszen A_1 az OD, B_1 az OE szakasz felezőpontja. Mivel a beírt kör érinti az AB egyenest, de nem metszi a C-n át AB-vel párhuzamosan húzott egyenest, így O az A_1B_1 egyenesnek az AB-t tartalmazó oldalán van. Ha tehát C az AB egyenes „fölött" van, akkor O a DE egyenes „alatt" van, és ugyancsak az AB egyenes „alatt" van az F pont.

Azt kell tehát megmondanunk, hogy mi annak a feltétele, hogy a DOE és BFA szögek egyenlőek legyenek. Toljuk el a DOE háromszöget a DB szakasz mentén. Amikor D a B-be jut, akkor E az A-ba kerül, hiszen az $ABDE$ négyszög paralelogramma. Vigye ez az eltolás O-t Q-ba. Ez a Q ugyanúgy az AB egyenes alatt a CO egyenesen lesz, mint F, hiszen a CO egyenes párhuzamos az eltolás irányával. Mivel az AB egyenes alatt a CO egyenesen mozogva, az AB szakaszt monoton változó szög alatt látjuk, a feladatban mondott egyenlőség szükséges és elegendő feltétele, hogy Q azonos legyen F-fel. Ez pedig azzal ekvivalens, hogy O felezze a CF szakaszt, és OE az AF-fel, OD a BF-fel legyen párhuzamos. Ekkor viszont a CO szögfelezőt az AO, BO szögfelezőkre tükrözve épp az OE, OD egyeneseket kapjuk, és ez a tükrözés a B_1, A_1 pontokat a CO szögfelező AB-n levő G pontjába viszi. Vagyis az AB szakasz hossza egyenlő az AB_1, A_1B szakaszok hosszának összegével, ami nem más, mint az AC, BC szakaszok hosszának a számtani közepe.

Megjegyzés. Látószögekről beszéltünk, de annak érdekében, hogy a megoldás a lehető legelemibb (legkevesebb ismert összefüggést felhasználó) legyen, nem használtuk a róluk szóló nevezetes tételt. Ez természetesen rövidítené a megoldás indítását. A látószögek felhasznált monotonitása tulajdonképpen közvetlenebbül látható, ha O-t toljuk F-be, és a rögzített F-ből nézzük a DB, EA síneken futó DE szakaszt; csak az egyszerűség kedvéért választottuk a fordított utat.