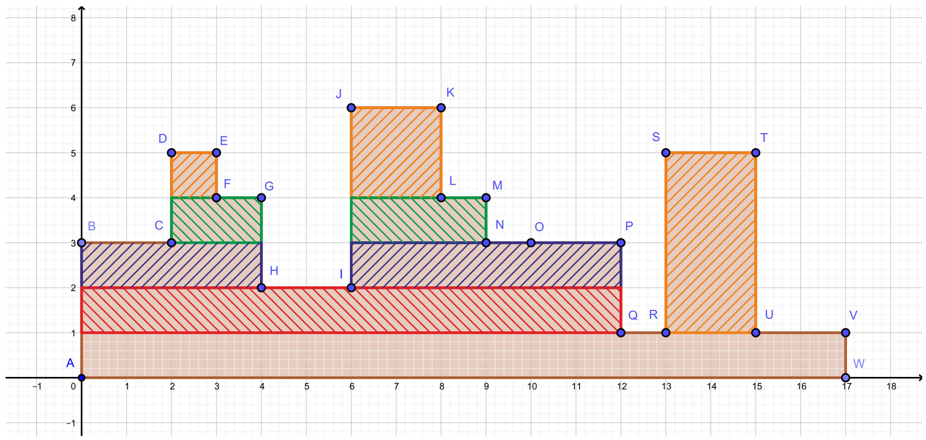
Az első részben az idei Közép-Európai Informatikai Diákolimpia (CEOI) Kacifántos kerítés című feladatát oldottuk meg egy egyszerű, de nem elég hatékony algoritmussal. A megoldás a kerítésen keresett téglalapokat úgy, hogy végighaladt a kerítéselemeken és minden lehetséges bal felső csúcs magasságához megkereste a legtávolabbi jobb alsó csúcsot, majd egy kombinatorikai képlettel megadta az ebben a részben lévő téglalapokat.

A megoldás hatékonyságának növelése érdekében a kerítés egy más felosztását kellett találnunk, ahol nincs szükség keresésre. Ez a felosztás a kerítés alakjából következik: azok a csúcsok egy kerítéselemen, amelyek y koordinátája nagyobb mindkét szomszédos kerítéselem magasságánál csak olyan téglalapok csúcsai lehetnek, amelyek abban a kerítéselemben vannak. Az ezekből választott bal felső csúcsok jobb alsó párja a kerítéselem jobb alsó csúcsa, tehát azonnal adódik, keresésre nincs szükség.

Nézzük például a hátsó belső borítón megtalálható *1. ábrán* a $(6,\ 4)$, L, K, J négyszöget.



A rajta található téglalapok $y > 4$ koordinátájú bal felső csúcsaihoz csak olyan jobb alsó csúcsok tartozhatnak, amelyek csak ezen a kerítéselemen lehetnek, a legtávolabbi jobb alsó csúcs a $(8, 0)$. Ugyanakkor az is látszik, hogy az $y \geq 4$ koordinátájú csúcsok csak olyan téglalapok jobb alsó csúcsai lehetnek, amelyek bal felső csúcsa ebben a kerítéselemben van, és a bal felső csúcs y koordinátája 4-nél nagyobb.

Miután megszámoltuk az $y > 4$ bal felső csúcsokhoz tartozó téglalapokat, ezeket a pontokat elhagyhatjuk, mivel jobb alsó csúcsként is már megszámoltuk őket. Tehát a számolás után a kerítés egyszerűsíthető: a szomszédai közül kiemelkedő kerítéselem mindkét szomszédjánál magasabban fekvő csúcsai elhagyhatók. Így egy olyan kerítéselemünk marad, amely valamelyik szomszédjával azonos magasságú. Az előbbi példában a J és K csúcsokkal határolt kerítéselem felső vonalát a továbbiakban a $(6,\ 4)$ és L csúcsok alkotják.

Az előző lépés tovább folytatható: a $(6,\ 3)$, N, M, $(6,\ 4)$ téglalap (amely már két kerítéselem része) $y > 3$ csúcsaival képzett téglalapok megszámolása után az $y > 3$ csúcsok elhagyhatók. Folytatásként az I, $(12, 2)$, P, $(6,\ 3)$ téglalap, majd a $(0,\ 1)$, Q, $(12,\ 2)$, $(0,\ 2)$ téglalap következik. Ez az utolsó lépés természetesen csak akkor következhet, ha a $(0,\ 2)$ és $HGFEDBC$ csúcsok által határolt részben lévő téglalapokat már megszámoltuk. Ezek az elhagyások addig folytathatók, amíg végül egy téglalap marad a kerítésből. Az ezen található téglalapok megszámolása az előzőekhez hasonlóan történhet.

A bemutatott eljárás minden lépésében egy „kiemelkedő" téglalapot kapunk, amelynek alsó és jobb oldala kivételével minden pontja olyan téglalapok bal felső csúcsa, melyekhez csak az adott kiemelkedésben és alatta találhatóak a számolásnál figyelembe veendő jobb alsó csúcsok. Az előbbi példában bemutatott $(6,\ 4)$, L, K, J téglalap esetében a $(b,\ f)$ bal felső csúcsok koordinátáira igaz, hogy $6 \leq b < 8$ és $4 < f \leq 6$, és a hozzájuk tartozó $(j,\ a)$ jobb alsó csúcsok koordinátáira teljesül, hogy $b < j \leq 8$ és $0 \leq a < f$.

Nézzük általánosan, tehát legyen egy, az eljárásban talált téglalap bal felső csúcsa $(bal,\ fent)$ és jobb alsó csúcsa $(jobb,\ lent)$. Az elhagyása előtt megszámolandó téglalapok (b, f) bal felső csúcsának koordinátáira teljesül, hogy $bal \leq b < jobb$ és $lent < f \leq fent$, míg (j, a) jobb alsó csúcsainak koordinátáira igaz, hogy $b < j \leq jobb$ és $0 \leq a < f$. Egy adott $(b,\ f)$ bal felső csúcshoz tartozó téglalapok száma tehát $(jobb - b) \cdot (f - 0)$. Ezeket összegezve a lehetséges $(b,\ f)$ csúcsokra a téglalapok száma:

$$\sum_{b=bal}^{jobb-1} \sum_{f=lent+1}^{fent} (jobb - b) \cdot (f - 0).$$

Ebben az összegben minden előforduló $(jobb - b)$ tényezőt megszorzunk minden f értékkel. A szorzás és az összeadás asszociativitása következtében ezt úgy is végezhetjük, hogy először összegezzük a tényezőket külön-külön, majd az így kapott mennyiségeket szorozzuk össze. Tehát a kifejezés kevesebb szorzással fölírva:

$$\sum_{b=bal}^{jobb-1} (jobb - b) \cdot \sum_{f=lent+1}^{fent} f.$$

Ebben két számtani sorozat szorzata szerepel, tehát az összegképlet alapján az eredmény:

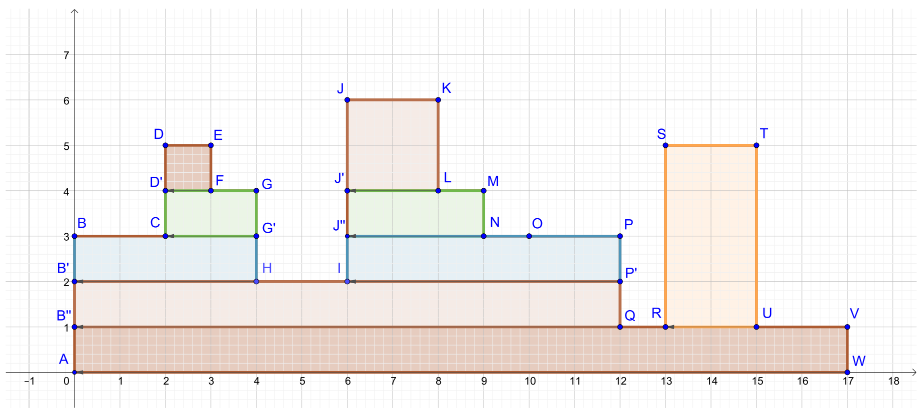
$$\frac{(jobb - bal + 1) \cdot (jobb - bal)}{2} \cdot \frac{(lent + 1 + fent) \cdot (fent - lent)}{2}.$$

A téglalapok megszámolását tehát megkapjuk a fenti eredmény alapján. Most már csak az a kérdés, hogy miként találjuk meg az „elhagyható” kerítésrészeket, amelyek a szomszédos kerítésrészeknél magasabbak. Az algoritmus nem végezhet a kerítéselemeken átnyúló keresést, tehát például a kerítéselemek eredeti sorrendjében kellene haladnia.

1. feladat: Vizsgáljuk meg az *1. ábrát,* és vegyük észre, hogy milyen jellemző tulajdonságok alapján találjuk meg a keresett kiemelkedéseket!

Haladjunk a kerítés felső vonalán. Az első kiemelkedés a $(2,\ 3),\ F,\ E,\ D$, amelyet az F csúcs zár. Ezt a részt elhagyva és a kerítés vonalán lefelé haladva a $(4,\ 3)$ pontban érünk a C csúcs magasságába, így a $C,\ (4,\ 3),\ G, (2,\ 4)$ téglalapot találjuk. Ennek levágása után a kerítés vonalán tovább menve a H csúcsban érünk egy kiemelkedés legjobboldalibb és legalsó pontjához, így elhagyhatjuk a $(0,\ 2),\ H,\ (4, v3),\ B$ téglalapot.

Megfigyelhető, hogy a kerítés vonalán egy csúcstól az alatta lévő csúcsig haladva találunk olyan pontot, amely egy kiemelkedés jobb alsó sarka. A megtaláláshoz csak azt kell tudnunk, hogy a vizsgált kerítésrész jobb oldalához melyik bal oldal tartozik. Nézzük a borítón lévő *2. ábrát.*



Az első lefelé haladás az EF szakaszon történik, ahol az F csúcs egy jobb alsó sarok, melynek bal alsó párja a kiemelkedés bal oldalán, a CD szakaszon található. Számoljuk meg a talált kerítésrészhez tartozó téglalapokat, majd hagyjuk el a D és E csúcsokat, és vegyünk föl egy új csúcsot, D'-t. A kerítés vonalán a következő lefelé haladás a GH szakaszon történik, a bal oldal pedig továbbra is a CD' szakaszra esik, így a $G'C$ szakasz feletti rész téglalapjai megszámolandók és a D', F, G csúcsok elhagyhatók. Az ábrán a kiemelkedések jobb alsó csúcsától a bal alsó csúcsáig egy-egy nyíl mutat.

Továbbhaladva a kerítés vonalán lefelé a H pontba jutunk, azonban a hozzá tartozó bal oldal már nem a CD egyenesre esik, hanem az attól balra eső AB szakaszra. Ez éppen az a rész, ahol a CD szakaszt megelőzően fölfelé haladtunk. Így látható, hogy a kerítés vonalán a fölfelé és lefelé haladó mozgások szakaszai párba állíthatók. Ha továbbhaladunk a kerítés vonalán, akkor megfigyelhetjük ezeket a párokat az $IJKLMNOPQ$ részen haladva is. Itt az utolsó szakaszon lefelé mozogva a Q ponthoz tartozó bal alsó csúcs ismét az AB szakaszra esik, miután az $P'I$ fölötti kerítésrészt is elhagytuk.

2. feladat: Adjuk meg, hogyan lehetne könnyen megtalálni egy-egy „kiemelkedés” jobb alsó csúcsához a bal alsó csúcsot, tehát a *2. ábrán* jelölt nyilak végpontját!

Induljunk el a kerítés bal alsó csúcsától fölfelé és haladjunk végig a kerítés vonalán annak jobb oldali legalsó csúcsáig. Minden fölfelé haladásnak megvan a lefelé haladás párja a kerítés vonalán való mozgás során. Ezek a párok alkotják a kiemelkedések bal és jobb oldali szakaszát. A párok úgy következnek a kerítés vonalán, mint egy kifejezés nyitó és csukó zárójelei, vagyis egymásba ágyazva. Ha egy felfelé mozgás megelőz egy másikat, akkor a hozzá tartozó lefelé haladás később jön, a másikhoz tartozó lefelé mozgás után. Ez egy helyesen zárójelezett kifejezésnél is pontosan így van. Amikor egy kifejezést kiértékelünk, akkor a legbelső zárójelben lévő részt számoljuk ki, majd a zárójeleket elhagyva folytatjuk a számolást. Itt pontosan ugyanezt kell tennünk, csak a kifejezés helyett a téglalapok megszámolását végezzük el, majd a kiemelkedő részt elhagyjuk, ahogyan a kifejezésnél a zárójeleket.

Az egymásba ágyazás, a belső párok elhagyása azt sugallja, hogy használjunk vermet a bal oldali szakaszok tárolására. A verem tetején mindig az a szakasz lesz, amelynek jobb oldali párja elsőként következik. A kerítés vonalán való haladás során minden felfelé mozgás egy új pár bal oldalát helyezi a veremre, míg a lefelé haladás egy párt vesz majd ki a veremből. Illetve ez csak akkor teljesül, ha a felfelé és lefelé haladás ugyanolyan magasról indult, tehát például a *2. ábrán* az $RSTU$ kiemelkedésnél. Általában kicsit összetettebb a helyzet. Például az I csúcstól fölfelé mozogva először tegyük a verem tetejére az IJ szakaszt, majd a KL szakaszon lefelé haladva a verem tetején lévő szakaszt cseréljük az IJ' szakaszra. Továbbhaladva a kerítésen az MN szakaszon lefelé változtassuk a verem tetején lévő szakaszt $I''J$-re. Innen továbblépve a PP' szakaszon lefelé haladva vesszük ki az IJ'' szakaszt a veremből. Figyelnünk kell tehát, hogy a lefelé mozgások során a verem tetején lévő szakasz alsó csúcsa és a lefelé mozgás szakaszának alsó csúcsa hogyan viszonyul egymáshoz. Innen látszik, hogy elegendő a veremben a felfelé haladó szakaszok alsó csúcsát elhelyezni, a felső csúcsra nincs szükség.

A program elkészítéséhez először be kell olvasnunk az adatokat, majd azokból meg kell adnunk a kerítés vonalán haladáskor érintett csúcsokat. Az *1. ábrán* ezeket a csúcsokat betűkkel jelöltük, melyeken ABC rendben fogunk végighaladni. Ezek a csúcsok a bemenetként kapott kerítéselemek magasságából és szélességéből számíthatók, a bemenet sorrendjében követik egymást. Így a bemenet feldolgozásakor egy lineáris futásidejű algoritmussal megadhatjuk a csúcsokat. Ennek a programrésznek az elkészítését az olvasóra bízzuk. Feltételezzük a továbbiakban, hogy a következő programrészek futása előtt már rendelkezésünkre áll egy $2N+2$ méretű pont[0..2N+1] tömb, amely sorrendben tartalmazza a kerítés vonalán érintett csúcsok (x, y) koordinátáit.

Ezen előkészítés után következzen a kerítés vonalának bejárása. Vegyünk föl egy v vermet, amely a pont[ ] tömb csúcsainak sorszámát tárolja, azaz a futás során legföljebb $2N+1$ csúcs indexét. Helyezzünk a verem tetejére egy 0-t, az első csúcs sorszámát. Amikor ez a csúcs kikerül a verem tetejéről, akkor bejártuk a kerítés teljes vonalát, tehát az üres verem jelzi a műveletsor végét. A bal és jobb változók mutatják, hogy a bejárás melyik csúcsokat vizsgálja. Kezdetben az első kerítéselem két felső pontjának sorszámát tartalmazzák.

```
1. Függvény KacifantosKerites2(N,h[0..N-1],w[0..N-1]) : Egész
2.     BeolvasasCsucsepites(N,h,w,pont)
3.     darab := 0
4.     v.Verembe(0)
5.     bal := 1
6.     jobb := 2
7.     Ciklus amíg nem v.Üres( )
```

A végeredményt adó függvényt több részletben írjuk le, tehát az algoritmusrészletek és magyarázatok felváltva követik egymást. A jobb érthetőség érdekében a függvény sorait számozzuk. A ciklusmagban egy elágazás szerepel, amelyben először megállapítjuk, hogy a kerítésen történő mozgás a jobb és az utána következő csúcs között milyen irányú. Ha felfelé haladunk a kerítés vonalán, akkor vermeljük a jobb oldali alsó csúcsot, vagyis megjegyezzük, hogy itt van egy kerítésrész bal oldali alsó csúcsa, majd továbblépünk a következő kerítéselemre. Ha azonos magasságú kerítéselemek vannak egymás mellett, akkor egyszerűen átmegyünk a következőre.

```
8.         Ha pont[jobb].y < pont[jobb+1].y akkor
9.             v.Verembe(jobb)
10.            bal := jobb+1
11.            jobb := jobb+2
12.        egyébként ha pont[jobb].y = pont[jobb+1].y akkor
13.            jobb := jobb+2
14.        egyébként
```

Az elágazás utolsó része a leginkább összetett, vagyis amikor lefelé haladunk a kerítés vonalán, tehát amikor pont[jobb] > pont[jobb+1]. Ekkor három esetet különböztetünk meg aszerint, hogy a verem tetején lévő csúcs milyen magasan van a jobb után következő csúcshoz képest.

```
15.            Ha pont[v.Felső( )].y > pont[jobb+1].y akkor
16.                szamol(darab,pont[v.Felső( )].x, pont[jobb].y, pont[jobb].x, pont[v.Felső( )].y)
17.                pont[jobb].y := pont[v.Felső( )].y
18.                v.Veremből( )
19.                bal := v.Felső( )+1
```

Amikor a verem tetejéhez tartozó csúcs van magasabban, akkor csak az ő magasságáig lévő téglalapot mint kiemelkedést számoljuk meg és hagyjuk el. A példában ilyen eset a GH szakaszon történő lefelé mozgás. Ekkor a veremben az A és a C csúcs indexe van, a tetején a C csúcs sorszáma. Mivel a C csúcs magasabban van, mint a G csúcs, ezért a jobb indexnél lévő G csúcsot módosítjuk G'-re (ezzel hagytuk el a kiemelkedést), majd kivesszük a veremből a C csúcs sorszámát, ahol most egyedül az A csúcs indexe van. Ezután megadjuk a bal változóban a bal oldali felfelé menő rész felső csúcsának indexét, a példában a B csúcsot. Így a folytatásként szóba jöhető kiemelkedés a bal oldala az AB szakasz, jobb oldala a $G'H$ szakasz.

```
20.            egyébként ha pont[v.Felső( )].y = pont[jobb+1].y akkor
21.                szamol(darab, pont[v.Felső( )].x, pont[jobb].y, pont[jobb].x, pont[v.Felső( )].y)
22.                v.Veremből( )
23.                Ha nem v.Üres( ) akkor
24.                    bal := v.Felső( )+1
25.                    jobb := jobb+2
26.                Elágazás vége
```

Amikor a verem legfelső eleme által hivatkozott csúcs azonos magasságban van a lefelé mozgás alsó csúcsával, akkor a kiemelkedés megszámolása után elhagyjuk ezt a kerítésrészt, vagyis kivesszük a veremből a tetején lévő elemet és továbblépünk előre a jobb változóval. Természetesen ezt csak akkor tehetjük meg, ha nem a 0-ás csúcsot vettük ki a veremből, hiszen azzal már befejeztük a bejárást. Az ábrán például az $RSTU$ kiemelkedésnél az R csúcsra mutat a verem felső száma és a TU szakaszon mozgunk lefelé. Ekkor a számolás után a verem tetején az A csúcs sorszáma található, a bal változó a B'' csúcsra, míg a jobb a V csúcsra hivatkozik.

```
            egyébként
               szamol(darab, pont[v.Felső( )].x, pont[jobb].y, pont[jobb].x, pont[jobb+1].y)
               pont[bal].y := pont[jobb+1].y
               jobb := jobb + 2
            Elágazás vége
         Elágazás vége
      Ciklus vége
      KacinfatosKerates2 := darab
   Függvény KacifantosKerites2 vége
```

A harmadik eset az a lehetőség, amikor a verem teteje által mutatott csúcs magassága kisebb, mint a lefelé mozgás alsó csúcsának magassága. Ekkor szintén megszámoljuk a kiemelkedő téglalaprészben lévő téglalapokat, majd a bal oldali szakasz felső csúcsának magasságát állítjuk a jobb oldali szakasz alsó csúcsának magasságára. Ez történik a példában, amikor az MN szakaszon mozgunk lefelé, és a J' csúcsból a J'' csúcsba lépünk.

A megoldást adó függvény a ciklus befejezése után nem tesz mást, mint a megszámolt téglalapok darab változóban lévő értékét visszaadja. Ehhez az algoritmusban többször is szereplő szamol(darab,bal,fent,jobb,lent) függvényt hívja meg minden kiemelkedő rész elhagyása előtt. A függvényben csak szorzás és 2-vel való osztás szerepel a korábban kiszámított képlet alapján. Csupán arra kell ügyelnünk, hogy a kifejezésben lévő mennyiségek szorzata igen nagy lehet, ezért túlcsordulás történhet. Ennek elkerülésére a mennyiségek 1 000 000 007-tel vett maradékait kell szoroznunk, illetve a szorzat maradékát hozzáadnunk a darab eddigi értékéhez. Ennek a függvénynek a megírását is az olvasóra bízzuk azzal a megjegyzéssel, hogy a 2-vel való maradékos osztásnál figyeljünk arra, hogy a szorzatok tényezői közül csak a párosakat osszuk.

Ezen algoritmus lépésszáma a bemenet N elemszámával arányos, tehát a program lineáris futásidejű, így a versenyen is megállta volna a helyét hatékonyság szempontjából is.

Schmieder László