Beszámoló a 2020. évi Eötvös-versenyről

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat 2020. évi Eötvös-versenye október 9-én délután 3 órai kezdettel tizennégy magyarországi helyszínen[1] került megrendezésre. Ezért külön köszönettel tartozunk mindazoknak, akik ebben szervezéssel, felügyelettel a segítségünkre voltak. A versenyen a három feladat megoldására 300 perc áll rendelkezésre, bármely írott vagy nyomtatott segédeszköz használható, de (nem programozható) zsebszámológépen kívül minden elektronikus eszköz használata tilos. Az Eötvös-versenyen azok vehetnek részt, akik vagy középiskolai tanulók, vagy a verseny évében fejezték be középiskolai tanulmányaikat. Összesen 48 versenyző adott be dolgozatot, 11 egyetemista és 37 középiskolás.

Ismertetjük a feladatokat és azok megoldását.

*

1. feladat. *Egy m_0 tömegű, állandó c fajhőjű minta hőmérséklete kicsivel a nitrogén T_0 forráspontja alatt van. Rendelkezésünkre áll m tömegű, forrásban lévő folyékony nitrogén és egy hőszivattyú. Mekkora minimális hőmérsékletre lehet lehűteni a mintát, mire elforr az összes nitrogén? A nitrogén forráshője L.*

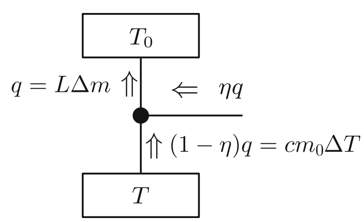
Megoldás. Egy $\eta = \dfrac{T_2 - T_1}{T_2}$ hatásfokú, hőerőgépként üzemeltetett Carnot-féle körfolyamat esetén a felső hőtartályból kivett hő η-ad része mint munkavégzés jelenik meg, $(1-\eta)$-ad része pedig az alsó hőtartályba kerül. Hőszivattyúként üzemeltetve munkát kell befektetnünk, az alsó hőtartályból szivattyúzzuk át az energiát a felsőbe, azaz a hő előjele változik ellenkezőre.

A Carnot-körfolyamattal általában úgy találkozunk, hogy a gép két állandó hőmérsékletű hőtartály között működik. Feladatunkban a Carnot-gép felső hőtartálya a forrásban lévő nitrogén, amelynek hőmérséklete végig T_0, az alsó hőtartály pedig a minta, amely viszont lassan hűl, T hőmérséklete nem állandó. Egy ciklus során azonban a minta hőmérséklete állandónak tekinthető.

Ebből a lassan változó hőmérsékletű hőtartályból vonunk el egy kis lépésben $cm_0\Delta T$ hőt. Ez a hő a felső hőtartályba érkező q hőnek

$$1 - \eta = 1 - \frac{T_0 - T}{T_0} = \frac{T}{T_0}\text{-szorosa,}$$

ahogy az *1. ábrán* is látható.



1. ábra

Ha Δm mennyiségű nitrogén forrt el, akkor a felső hőtartálynak $L\Delta m$ hőt kellett kapnia. Ebből a

$$cm_0\Delta T = \frac{T}{T_0} L\Delta m$$

összefüggéshez jutunk. Ez a

$$\frac{cm_0\,\mathrm{d}T}{T} = \frac{L\,\mathrm{d}m}{T_0}$$

differenciális összefüggéséhez vezet. Ezt kell integrálni a kezdeti állapottól a végső állapotig. Az alsó hőtartály T hőmérséklete T_0-ról $T_{\min}$-re csökken, és közben a folyékony nitrogén tömege m-ről nullára csökken. Tehát

$$cm_0 \ln \frac{T_0}{T_{\min}} = \frac{Lm}{T_0},$$

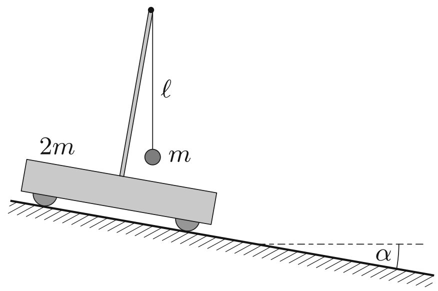
amiből a keresett minimális hőmérséklet

$$T_{\min} = T_0 e^{-\frac{Lm}{T_0 cm_0}}.$$

Megjegyzés. Aki tudja, hogy a Carnot-körfolyamat közben az entrópia állandó, és ismeri az entrópia kifejezéseit, az azonnal megkapja az integrálásból kapott összefüggést.

2. feladat. *Könnyen gördülő, $2m$ tömegű kiskocsira egy árbóc van rögzítve, aminek felső végére ℓ hosszúságú fonállal egy m tömegű kis golyót függesztettünk. A kiskocsit egy nem túl meredek, α hajlásszögű lejtőre helyezzük, majd megvárjuk az inga lengéseinek lecsillapodását, és végül a kocsit elengedjük* (2. ábra).

[1] Részletek a verseny honlapján: `http://eik.bme.hu/~vanko/fizika/eotvos.htm`.

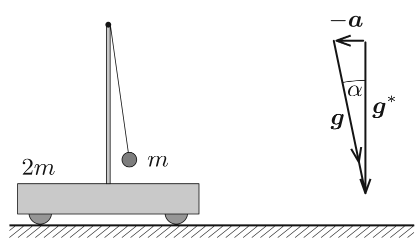


2. ábra

a) A mozgás során mennyire tér ki a fonál a függőlegestől?
b) Mekkora utat tesz meg a kiskocsi, amíg a fonál újra függőlegessé válik?

Megoldás. Az ingából és kiskocsiból álló rendszerre lényegében csak a nehézségi erő és a lejtőre merőleges irányú kényszererők hatnak, hiszen a kerekek gyorsuló forgásához szükséges tapadási súrlódási erőt a „könnyen gördülő" kifejezés miatt elhanyagolhatjuk. Lejtőirányú komponense csak a nehézségi erőnek van, ezért a rendszer tömegközéppontja a lejtővel *párhuzamos* irányban állandó, $g\sin\alpha$ gyorsulással mozog. A tömegközéppont a mozgás során a lejtőre *merőleges* irányban is gyorsul, ez azonban a további gondolatmenet szempontjából nem lényeges.

Üljünk bele a zérus kezdősebességű, a lejtővel párhuzamosan $|\boldsymbol{a}| = g\sin\alpha$ nagyságú gyorsulással mozgó vonatkoztatási rendszerbe! Egy gyorsuló rendszerben bármely m' tömegű testre a Newton-törvények csak úgy maradnak érvényben, ha a valójában rá ható (kölcsönhatásból származó) erők mellett bevezetjük a rendszer $\boldsymbol{a}$ gyorsulásával ellentétes irányú, $-m'\boldsymbol{a}$ tehetetlenségi erőt is. A $-m'\boldsymbol{a}$ tehetetlenségi erő és az $m'\boldsymbol{g}$ nehézségi erő vektori összege $m'\boldsymbol{g}^*$ alakban is felírható, ahol $\boldsymbol{g}^* = \boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}$. A gyorsuló rendszerben tehát minden test úgy mozog, mintha egy $\boldsymbol{g}^*$ effektív nehézségi gyorsulású erőtérben helyezkedne el. Esetünkben a vonatkoztatási rendszer $\boldsymbol{a}$ gyorsulása éppen megegyezik a $\boldsymbol{g}$ nehézségi gyorsulás lejtőirányú összetevőjével, ezért az effektív $\boldsymbol{g}^*$ nehézségi gyorsulás a lejtőre *merőleges* irányú, nagysága pedig $g\cos\alpha$. Mivel a gyorsuló rendszerben $\boldsymbol{g}^*$ határozza meg a függőleges irányt, célszerű a feladat ábráját elforgatni, ahogy az a *3. ábrán* is látható.



3. ábra

A mozgást a gyorsuló vonatkoztatási rendszerünkben elemezve azt látjuk, hogy a kiskocsi és az ingatest nyugalomból indul, az inga kezdeti szögkitérése $\boldsymbol{g}^*$ irányától mérve jobbra éppen α. Az inga lengése során a rendszer tömegközéppontja külső lejtőirányú erő hiányában nem mozdul el, így mind a kiskocsi, mind pedig az ingatest mozgásba jön. A mechanikai energia megmaradásából és a tömegközéppont-tételből következik, hogy az inga szögkitérésének legnagyobb értéke $\boldsymbol{g}^*$-hoz viszonyítva a túlsó oldalon szintén α lesz, ami akkor következik be, amikor a kiskocsi és az ingatest először áll meg. Ez azt jelenti, hogy az eredeti vonatkoztatási rendszerben az inga a kezdeti helyzetéhez képest (azaz $\boldsymbol{g}$-hez viszonyítva) maximálisan 2α szöggel tér ki. Ezzel a feladat *a*) kérdésére válaszoltunk.

Térjünk most rá a *b*) részre. A gyorsuló rendszerben az ingatest és a kiskocsi is periodikus mozgást végez az egyensúlyi helyzet körül, amelyben az inga fonala éppen párhuzamos $\boldsymbol{g}^*$-gal. Az inga legkorábban T periódusidő múlva érkezik vissza a kiindulási helyzetbe. Ebben a pillanatban a tömegközéppont elmozdulása

$$s = \frac{1}{2} g\sin\alpha \cdot T^2,$$

és ugyanekkora a kocsi elmozdulása is, hiszen a kocsi relatív helyzete a tömegközépponthoz viszonyítva éppen ugyanaz, mint az indítási állapotban volt. Feladatunk tehát a rezgés T periódusidejének meghatározása.

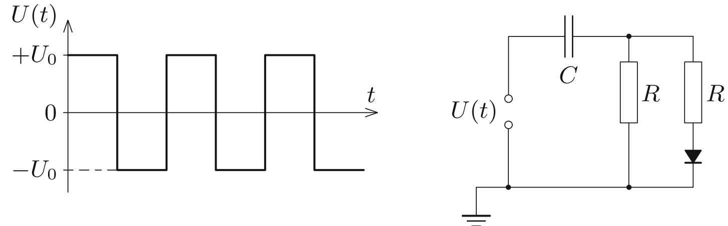
A gyorsuló rendszerben a tömegközéppont megmaradása miatt a kocsi kitérése minden pillanatban feleakkora és ellentétes irányú, mint az ingatest lejtővel párhuzamos irányú kitérése. Ezért a fonál felső harmadolópontja lényegében nem mozdul el (valójában a lejtőre merőleges irányban mégis, de elhanyagolható mértékben). Az ingatest tehát úgy mozog a $|\boldsymbol{g}^*| = g\cos\alpha$ nehézségi gyorsulású erőtérben, mintha egy $2\ell/3$ hosszúságú fonálra lenne felfüggesztve. Egy ilyen inga lengésideje *kis kitérések* esetén:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{3g\cos\alpha}}.$$

Vajon alkalmazható-e most ez az összefüggés? A feladat szövege szerint a lejtő *nem túl meredek.* Egy 45°-os lejtő már elég meredeknek számít, de az ekkora szögben kitérített inga lengésideje is csak kb. 4%-kal nagyobb a fenti képlettel számolt lengésidőnél. Ha a lejtő csak 30°-os, az eltérés 2%-nál is kisebb. Jó közelítéssel tehát azt mondhatjuk, hogy a kocsi elmozdulása addig a pillanatig, amíg az inga újra függőlegessé válik

$$s \approx \frac{1}{2} g \sin\alpha \cdot 4\pi^2 \frac{2\ell}{3g\cos\alpha} = \frac{4\pi^2}{3} \ell \operatorname{tg}\alpha .$$

3. feladat. *Egy ideális diódából, két $R = 2$ kΩ nagyságú ellenállásból, egy kezdetben töltetlen, $C = 100\ \mu F$ kapacitású kondenzátorból és egy feszültséggenerátorból a* 4. *ábrán látható kapcsolást állítottuk össze. A feszültséggenerátoron* $f = 5$ kHz *frekvenciájú,* $+U_0$ *és* $-U_0$ *között változó szimmetrikus négyszögjelet állítunk be, ahol* $U_0 = 3{,}6$ V.



4. ábra

a) Mekkora maximális feszültségre töltődik fel a kondenzátor?

b) A kondenzátor töltetlen állapotától számítva körülbelül mennyi idő után éri el a kondenzátor feszültsége a maximális érték felét?

Megoldás. A kapcsolásban félperiódusonként felváltva $+U_0$ és $-U_0$ feszültséget kapcsolunk egy soros RC kapcsolásra, ahol a kondenzátor kapacitása mindvégig C, az ellenállás pedig az áramiránytól függően $R_1 = \dfrac{R}{2}$, illetve $R_2 = R$. Jól ismert, hogy ha egy töltetlen, C kapacitású kondenzátorból és egy R ellenállásból álló soros RC kapcsolásra U_0 feszültséget kapcsolunk, akkor a kondenzátor feszültsége az

$$U(t) = U_0\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

függvény szerint változik, ahol az időállandó $\tau = RC$.

Vegyük észre, hogy a mi esetünkben az (egyik) időállandó $\tau = RC = 0{,}2$ s (a másik ennek fele), a négyszögjel periódusideje pedig $T = \dfrac{1}{f} = 0{,}2$ ms, és így $T \ll \tau$. Emiatt egy fél periódusnyi idő alatt a töltődő kondenzátor feszültsége nagyon jó közelítéssel lineárisan változik.

Legyen a kondenzátor feszültsége egy adott időpillanatban $U_\mathrm{C}(t)$, a kondenzátoron átfolyó áram pedig $I(t)$. A négyszögjel első fél periódusában (amikor a dióda nyitva van, és mindkét ellenálláson folyik áram)

$$U_0 - U_\mathrm{C} = R_1 I_1(t) = \frac{R}{2} I_1(t), \quad \text{amiből} \quad I_1(t) = \frac{2}{R}\big[U_0 - U_\mathrm{C}(t)\big].$$

Egy fél periódus alatt ez az áram $I_1(t)\dfrac{T}{2}$ töltést szállít a kondenzátorra, így a kondenzátor feszültségének megváltozása

$$\Delta U_\mathrm{C}(t) = \frac{1}{C} I_1(t)\frac{T}{2} = \frac{T}{RC}\big[U_0 - U_\mathrm{C}(t)\big] = \frac{T}{\tau}\big[U_0 - U_\mathrm{C}(t)\big].$$

A másik fél periódusban (amikor a dióda lezár, és csak az egyik ellenálláson folyhat áram)

$$-U_0 - U_\mathrm{C} = R_2 I_2(t) = R I_2(t), \quad \text{amiből} \quad I_2(t) = \frac{1}{R}\big[-U_0 - U_\mathrm{C}(t)\big],$$

és a fél periódus alatt a kondenzátor feszültségének megváltozása

$$\Delta U_\mathrm{C}(t) = \frac{1}{C} I_2(t)\frac{T}{2} = \frac{T}{2RC}\big[-U_0 - U_\mathrm{C}(t)\big] = \frac{T}{2\tau}\big[-U_0 - U_\mathrm{C}(t)\big].$$

Egy teljes periódus alatt a feszültség teljes megváltozása a két fél periódus alatti változás összege:

$$\Delta U_\mathrm{C}(t) = \frac{T}{2\tau}\big[U_0 - 3U_\mathrm{C}(t)\big] = \frac{3T}{2\tau}\left[\frac{U_0}{3} - U_\mathrm{C}(t)\right].$$

A kondenzátor feszültsége akkor nem nő tovább, ha $\Delta U_\mathrm{C}(t) = 0$, azaz ha $U_\mathrm{C}(t) = \dfrac{U_0}{3}$, tehát a kondenzátor hosszú idő után $U_\mathrm{C}(\infty) = \dfrac{U_0}{3} = 1{,}2$ V feszültségre töltődik fel.

Ezután áttérünk a *b*) kérdés megválaszolására. Mivel a periódusidő sokkal kisebb az időállandónál, az egy periódus alatti feszültségváltozás nagyon kicsi, a kondenzátor sok perióduson át töltődik. Ezen az időskálán a félperiódusok alatti töltődések és kisülések kis ingadozása nem is látszik. Egy olyan folyamatot kapunk, ahol a kondenzátor feszültsége lényegében folyamatosan nő a kezdeti $U_\mathrm{C}(0) = 0$ értéktől az $U_\mathrm{C}(\infty)$ értékig.

Az utolsó egyenletünk alapján

$$\frac{\mathrm{d}\big[U_\mathrm{C}(\infty) - U_\mathrm{C}(t)\big]}{\mathrm{d}t} \approx \frac{\Delta\big[U_\mathrm{C}(\infty) - U_\mathrm{C}(t)\big]}{T} = -\frac{3}{2\tau}\big[U_\mathrm{C}(\infty) - U_\mathrm{C}(t)\big].$$

Ez pedig egy ugyanolyan differenciálegyenlet, mint amely leírja egy kondenzátor feltöltődését (és amely jól ismert a radioaktív bomlástörvényből is), megoldása:

$$\big[U_\mathrm{C}(\infty) - U_\mathrm{C}(t)\big] = \big[U_\mathrm{C}(\infty) - U_\mathrm{C}(0)\big]e^{-\frac{3t}{2\tau}},$$

amiből látható, hogy a kondenzátor akkor töltődik fel a maximális érték felére, ha

$$e^{-\frac{3t}{2\tau}} = \frac{1}{2}, \quad \text{azaz} \quad t = \frac{2}{3}\tau\ln 2 = 0{,}0924\ \text{s}.$$

*

Az ünnepélyes eredményhirdetés és díjkiosztás a járványhelyzet miatt elmaradt. Helyette az eredetileg meghirdetett időpontban, 2020. november 20-án délután 3 órakor a verseny honlapjára került fel mindaz, ami az eredményhirdetésen elhangzott volna. Ismertetésre kerültek az 50 és 25 évvel ezelőtti Eötvös-verseny feladatai, és az akkori díjazottak egy részének visszaemlékezései: az 50 évvel ezelőttiek közül *Horváth Péter* és *Tichy-Rács Ádám,* a 25 évvel ezelőttiek közül *Lovas Rezső, Tóth Gábor Zsolt* és *Varga Dezső* küldött üzenetet.

Ezt követte a 2020. évi verseny feladatainak és megoldásainak bemutatása (az 1. feladat megoldását Tichy Géza, a 2. feladatét Vigh Máté, a 3. feladatét Vankó Péter írta le), majd az eredmények közlése:

Egyetlen versenyző sem oldotta meg mindhárom feladatot, így a versenybizottság nem adott ki első díjat.

Az első feladat helyes és a harmadik feladat lényegében helyes megoldásáért, valamint a második feladatban elért részeredményekért *második díjat* nyert **Bonifert Balázs,** a budapesti Baár-Madas Református Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Horváth Norbert* tanítványa és **Pácsonyi Péter,** a BME mechatronikai mérnök alapszakos hallgatója, aki a Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnáziumban érettségizett *Pálovics Róbert* tanítványaként.

A második és a harmadik feladat kicsit hiányos megoldásáért *harmadik díjat* nyert **Molnár Szabolcs,** a BME fizika BSc szakos hallgatója, aki a Kecskeméti Katona József Gimnáziumban érettségizett *Sáróné Jéga-Szabó Irén* tanítványaként.

Az első feladat hibátlan megoldásáért *dicséretet* kapott **Fekete Dezső Domonkos,** a BME fizika BSc szakos hallgatója, aki a Kecskeméti Katona József Gimnáziumban érettségizett *Sáróné Jéga-Szabó Irén* tanítványaként, **Selmi Bálint,** a Pécsi Leőwey Klára Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Simon Péter, Kotek László* és *Pálfalvi László* tanítványa, valamit **Sepsi Csombor Márton,** a Zalaegerszegi Zrínyi Miklós Gimnázium 12. osztályos tanulója, *Kovács Tibor* tanítványa.

A második díjjal *Zimányi Gergely* adományából 75 ezer, a harmadik díjjal 55 ezer, a dicsérettel 35 ezer forint pénzjutalom jár. A díjazottak tanárai az *Eötvös Loránd emlékalbumot* kapják. Az Eötvös Loránd Fizikai Társulatot a *Nanorobot Vagyonkezelő Kft.* és az *Andersen Adótanácsadó Zrt.* támogatja. Köszönjük az adományozók önzetlen támogatását!

Tichy Géza, Vankó Péter, Vigh Máté