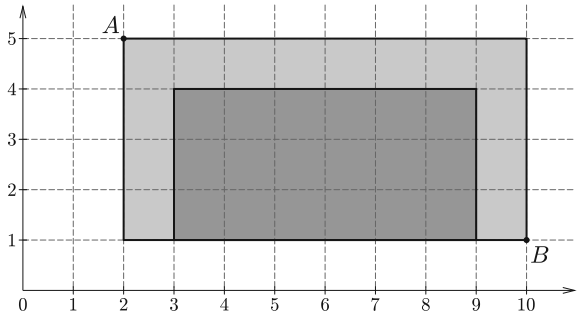
Ezen a néven jelent meg a CEOI (Közép-Európai Informatikai Diákolimpia) idei első feladata. A teljes szöveg elérhető a következő címen:

http://ceoi2020.inf.elte.hu/contest/tasks/.

1. feladat: Olvassuk el és értelmezzük a problémát, készítsünk néhány példát, rajzoljunk, majd próbáljuk meg egy-két mondatban összefoglalni, hogy pontosan mit kérdez a feladat.

A feladat téglalapok megszámolását kéri. Kombinatorikai feladatok között láthattunk már hasonlót: számoljuk meg, hogy az $A(a_x, a_y)$ és $B(b_x, b_y)$ pontok mint szemközti csúcsok által meghatározott, a koordinátatengelyekkel párhuzamos oldalú téglalapban hány olyan téglalap van, amelynek csúcsai egész koordinátákkal rendelkeznek és oldalai szintén a koordinátatengelyekkel párhuzamosak.

2. feladat: Adjunk módszert a téglalapok megszámolására egy $a \times b$ oldalú téglalap esetén.



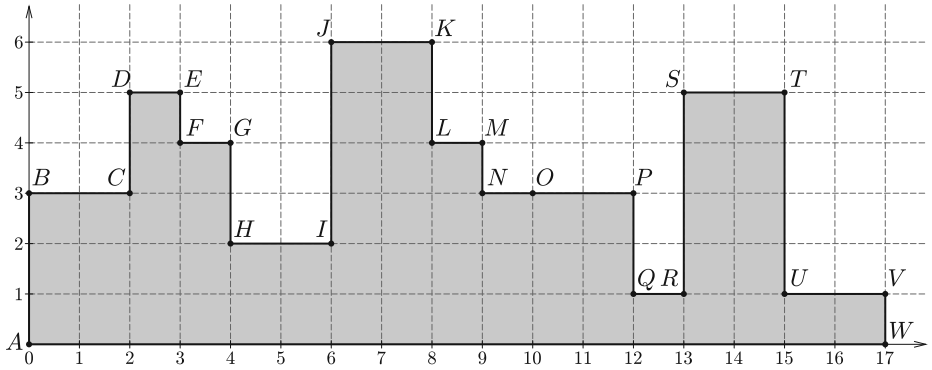
Válasszunk a téglalap kerületén vagy belsejében tetszőlegesen két egész koordinátájú pontot. Ha a választott pontok egyenese nem párhuzamos egyik tengellyel sem, akkor meghatároznak egy téglalapot úgy, hogy ezt a két pontot tekintjük két szemközti csúcsnak. Így az első csúcs elhelyezésére $(a+1)\cdot(b+1)$ lehetőség adódik, míg a másodikra $a \cdot b$. Ezen a módon minden téglalapot négyszer számoltunk: kiválasztottuk a bal felső-jobb alsó csúcspárt kétszer, és a bal alsó-jobb felső csúcspárt is kétszer. Ezért a téglalapok száma

$$\frac{(a+1)\cdot(b+1)\cdot a \cdot b}{4}.$$

A kacifántos kerítés téglalapokból épül föl, de a megszámolandó téglalapok átnyúlnak a kerítést alkotó téglalapokon, tehát a problémát még nem oldottuk meg. A továbbiakban vizsgáljuk a következő bemenethez tartozó kerítést. Az első sorban a kerítéselemek N száma, a másodikban azok h_i magassága és a harmadik sorban az elemek w_i szélessége található $(1 \le i \le N)$:

```
11
3 5 4 2 6 4 3 3 1 5 1
2 1 1 2 2 1 1 2 1 2 2
```

Helyezzük el a kerítés bal alsó sarkát a koordináta-rendszer középpontjába. Nézzük, hogyan lehetne a téglalapoknak csúcsokat választani a kerítésen. Látjuk, hogy például a $(3, 2)$ és $(11, 1)$ pontok, mint (bal, felső) és (jobb, alsó) csúcsok meghatároznak egy megszámolandó téglalapot, miközben az egyik csúcs a második (vagy harmadik), míg a másik csúcs a nyolcadik kerítéselemen található.



3. feladat: Találjunk ki egyszerű algoritmust, ami megszámolja a keresett téglalapokat.

Ha a kerítés méretei a példához hasonlóan kis számok, akkor nem is olyan nehéz algoritmust készíteni. Tekintsük a kerítés egész koordinátájú csúcsai közül azokat, amelyek lehetnek egy téglalap bal felső csúcsai, és válasszunk mindegyikhez megfelelő jobb alsó csúcsokat. Például a $(3,3)$ ponthoz jobb alsó csúcsként kiválaszthatjuk a $(4,2)$, $(4,1)$, $(4,0)$ pontokat. De az $(1,2)$ ponthoz már sokkal több jobb alsó csúcs választható, a legtávolabbi a $(12,0)$. Az előbbi kombinatorikus gondolatmenethez hasonlóan megszámolhatjuk minden bal felső csúcshoz a lehetséges jobb alsó csúcsokat. Az $(1,2)$ pont esetén a jobb alsó csúcsok x koordinátája 2-től 12-ig, míg y koordinátája 0-tól 1-ig terjedhet. Így a meghatározott téglalapok száma $11 \cdot 2 = 22$.

A feladat tehát megoldható úgy, hogy minden lehetséges bal felső (b,f) csúcshoz meghatározzuk a tőle legtávolabbi olyan jobb alsó (j,a) csúcsot, amivel olyan téglalapot alkot, melynek minden pontja a kerítésen van. A bal felső csúcshoz rajzolható összes téglalap benne van ebben az előbbi, legnagyobb téglalapban. Az fenti kombinatorikai gondolatmenethez hasonlóan ezek száma $(j-b+1)\cdot(f-a+1)$. A jobb alsó csúcs mindig a kerítés alján van, tehát $a=0$, míg a jobb oldali utolsó megfelelő pont x koordinátáját úgy kapjuk, hogy elindulunk az X tengely pozitív irányában a (b,f) pontból, és az első olyan kerítést alkotó téglalapnál megállunk, amelynek magassága kisebb, mint f. Ha mind megfelelő, akkor a kerítés végéig megyünk.

Nézzük a megoldás algoritmusát. A bemenet beolvasásakor értéket adunk az N egész változónak, valamint a $h[0..N-1]$ és $w[0..N-1]$ egészeket tartalmazó N méretű tömbnek. Ezeket, valamit a továbbiakban használt tömböket 0-tól indexeljük. Ezt a műveletsort végzi el a Beolvas() eljárás, amit nem részletezünk.

Mivel a lehetséges bal felső csúcsoktól az X tengely pozitív irányában elindulva keresni fogunk, ezért tudnunk kell az egyes kerítést alkotó téglalapok abszolút helyzetét az X tengelyen. Ehhez hozzunk létre az el$[0..N]$ tömböt, amelynek k-adik eleme megadja a k-adik kerítéselem bal oldalának x koordinátáját ($0 \le k < N$), míg N-edik eleme az utolsó kerítéselem jobb oldalának helyét, azaz a kerítés végét. Természetesen úgy is nézhetjük, hogy az el$[k+1]$ a k-adik kerítéselem jobb vége, vagyis jobb oldalának x koordinátája. A tömb értékeinek számítását a következő eljárás végzi:

```
Eljárás TeglalapokEleje(N,w[0..N-1],el[0..N])
    el[0] := 0
    Ciklus k := 0-tól N-1-ig
        el[k+1] := el[k]+w[k]
    Ciklus vége
Eljárás TeglalapokEleje vége
```

A továbbiakban megszámoljuk mindegyik kerítéselemnél azokat a téglalapokat, amelyek bal felső csúcsa a kerítéselemen, de nem annak jobb szélső oldalán található. Utóbbiakat a következő kerítéselemhez soroljuk. Mivel az utolsó kerítéselem jobb oldalán nem lehetnek bal felső csúcsok, így minden lehetséges bal felső csúcsot pontosan egyszer számolunk. A számítást a k-adik kerítéselemre a KeritesElem() függvény végzi. Felülről lefelé haladunk, mivel a bal felső csúcsok $h[k]$-tól 1-ig helyezkedhetnek el. Minden felso szinthez (y értékhez) megnézzük, hogy meddig lehet jobbra elmenni a KeresJobb() függvény segítségével, majd a kerítéselem minden lehetséges bal értékétől kiszámoljuk a (bal, felso) koordinátákból kiinduló téglalapok számát.

```
Függvény KeritesElem(N,h[0..N-1],w[0..N-1],k,el[0..N]) : Egész
    darab := 0
    Ciklus felso := 1-től h[k]-ig
        meddig := KeresJobb(N,h,k,felso)
        jobb := el[meddig]
        Ciklus bal := el[k]-tól (el[k]+w[k]-1)-ig
            darab := darab + (jobb-bal)*(felso-0)
        Ciklus vége
    Ciklus vége
    KeritesElem := darab
Függvény KeritesElem vége
```

A KeresJobb() függvény megadja, hogy a k-adik kerítéselem felso magasságú pontjából meddig lehet jobbra menni úgy, hogy a kerítésen maradjunk. Minden $m > k$-adik kerítéselem megfelelő, amely nem alacsonyabb a felso magasságnál. Ha mindegyik megfelelő, akkor a kerítés jobb végénél állunk meg. A függvény visszaadja az első nem megfelelő kerítéselem indexét, illetve N-et, ha a kerítés végéig minden elem elég magas.

```
Függvény KeresJobb(N,h[0..N-1],k,felso) : Egész
    m := k+1
    Ciklus amíg m < N és h[m] ≥ felso
        m := m+1
    Ciklus vége
```

```
    KeresJobb := m
Függvény KeresJobb vége
```

A KacifantosKerites függvény adja a feladat megoldását: a beolvasás és az előkészítő műveletek után megszámolja az egyes kerítéselemekből bal felső csúcsokkal készíthető téglalapokat, és visszaadja azok 1 000 000 007-tel vett osztási maradékát.

```
Függvény KacifantosKerites() : Egész
    Beolvasas(N,h,w)
    TeglalapokEleje(N,w,el)
    darab := 0
    Ciklus k := 0-tól N-1-ig
        darab := darab + KeritesElem(N,h,w,k,el)
    Ciklus vége
    KacinfatosKerates := darab MOD 1000000007
Függvény KacifantosKerites vége
```

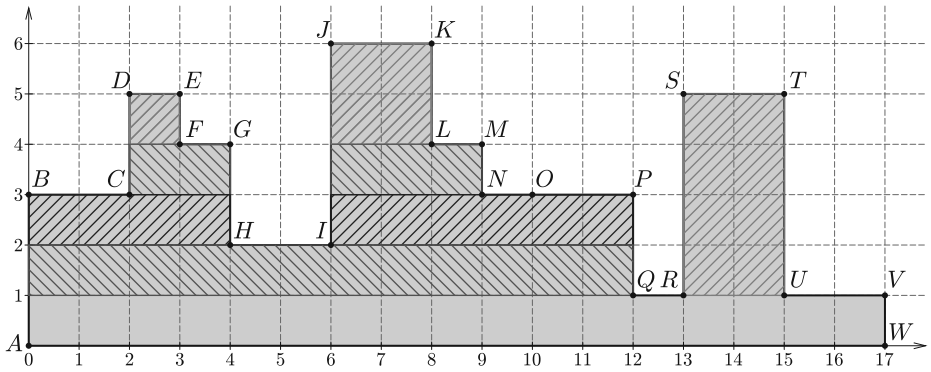
Feltételezzük, hogy az algoritmusból készített programban az esetlegesen nagy számértékek elférnek a használt egész típusban és a műveletek nem okoznak túlcsordulást. A megoldás azonban a nagy számú és nagyságrendű bemenetekkel sajnos ettől függetlenül nem boldogul. A versenyen kevés pontot kapott volna, mivel a futásidő nagyobb $h[\,]$ és N értékek esetén meghaladja az időkeretet. Ez érthető, hiszen a KeresJobb() függvény $\sum_{i=0}^{N-1} h_i$ alkalommal hívódik meg, vagyis az $y = 0$ kivételével minden kerítéselem magasságnál, míg a benne szereplő ciklus átlagos lépésszáma a kerítéselemek N számával arányos. Tehát hatékonyabb algoritmusra lesz szükségünk, amiben nem szerepel a KeresJobb függvényhez hasonló keresés.

Az előző algoritmus kerítéselemeken választott bal felső csúcsokat, és a jobb alsó csúcsokat tőle jobbra, a többi kerítéselemet vizsgálva kereste. Ne ragaszkodjunk feltétlenül a kerítés pontjainak ilyen csoportosításához.

4. feladat: Próbáljuk olyan téglalapokra bontani a kerítést, ahol magától adódik egy-egy bal felső csúcshoz a legtávolabbi jobb alsó csúcs.

Vegyük észre, hogy ha egy kerítéselem mindkét szomszédjánál magasabb, akkor azok a csúcsai, amelyek mindkét szomszéd magasságánál nagyobb y koordinátával rendelkeznek, csak olyan csúcsokkal alkothatnak a kerítésen téglalapot, amelyek az adott kerítéselemen vannak. Például tekintsük a vizsgált bemenetnél a $(6, 4)$, $(8, 4)$, $(8, 6)$ és $(6, 6)$ csúcsok által meghatározott téglalapot. Az ezen fekvő bal felső csúcsokhoz – kivéve az alsó oldalélt – csak ezen a kerítéselemen lévő csúcsok közül választhatunk jobb alsót, tehát csak a $6 \leq x \leq 8$ értékek jöhetnek számításba. Ez éppen az adott kerítéselem két vége, tehát ekkor semmilyen X tengely irányú keresésre nincs szükség.

Gondoljuk tovább a dolgot. Ha az előbbi kerítésrészre eső bal felső csúcsokkal alkotott téglalapokat megszámoltuk, akkor gyakorlatilag elhagyhatjuk ezt a részét a kerítésnek, hiszen jobb alsó csúcsként is megszámoltuk minden pontját. Amennyiben további, hasonlóan kiemelkedő részek vannak a kerítésen, akkor azokban is számolhatunk. Így a példában a $(2, 4)$ és a D, E, F pontok által alkotott vagy az $RSTU$ téglalap esetében. Az alábbi *ábrán* satírozással jelöljük a szóban forgó kiemelkedéseket.



Ezeket a kerítésrészeket elhagyva ismét olyan kerítés keletkezik, amelynek vagy vannak kiemelkedései, vagy egyetlen téglalap az egész kerítés. Így a számolás folytatható pl. a $(6, 3)$, N, M, $(6, 4)$ téglalappal. Amennyiben lépésről-lépésre minden kiemelkedést a számolás után elhagyunk, akkor végül egy téglalap marad, amivel készen is vagyunk. A megoldáshoz tehát csak arra van szükség, hogy minél egyszerűbben meghatározzuk a kiemelkedéseket.

5. feladat: Gondolkozzunk olyan algoritmuson, ami az adatok alapján végigmegy a kiemelkedéseken és megszámolja azokat a téglalapokat, amelyek bal felső csúcsa ezeken található.

A cikk folytatásában választ adunk az 5. feladatra és hatékony algoritmust készítünk a versenyen kitűzött problémához. Természetesen a leírt gondolatmeneten kívül más ötlet alapján is lehet megoldást készíteni. Az utóbbi évek CEOI feladatai szerepelnek a http://mester.inf.elte.hu adatbázisában, így programunk helyességét és hatékonyságát ellenőrizhetjük a segítségével.