I. rész

1. *Melyek azok az x, y egész számok, amelyekre egyszerre teljesül, hogy:*
a) $x^2 + y^2 \leq 25$;
b) $|x| + |y| \geq 5$;
c) $\log_2(y + 1 - x^2) \geq 0$?

(*12 pont*)

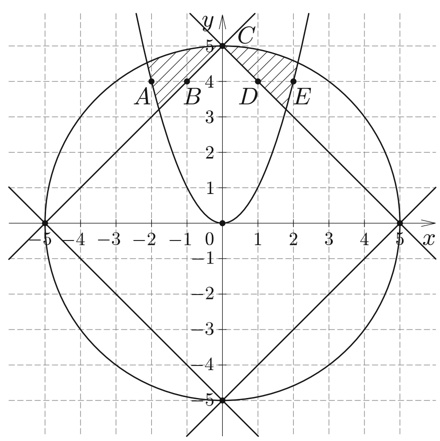
Megoldás. Az *a)* feltételnek megfelelő valós számpárok halmaza a koordinátarendszerben egy origó középpontú, 5 egység sugarú zárt körlemezzel szemléltethető.

b) Itt a négy negyedben az alábbiak szerint alakulnak a halmazok:

$$
\begin{array}{lll}
\text{ha} & x \geq 0 \text{ és } y \geq 0, & \text{akkor } y \geq -x + 5; \\
\text{ha} & x \leq 0 \text{ és } y \geq 0, & \text{akkor } y \geq x + 5; \\
\text{ha} & x \leq 0 \text{ és } y \leq 0, & \text{akkor } y \leq -x - 5; \\
\text{ha} & x \geq 0 \text{ és } y \leq 0, & \text{akkor } y \leq x - 5.
\end{array}
$$

c) $\log_2(y+1-x^2) \geq 0$, $\log_2(y+1-x^2) \geq \log_2 1 \Rightarrow$ (mivel a $\log_2 x$ függvény szigorúan monoton növő) $y+1-x^2 \geq 1$, tehát $y \geq x^2$ (a normálparabola és belső pontjai). (Ekkor $y + 1 - x^2 > 0$, tehát a logaritmus értelmezett.)

Ha mindezeket, továbbá azt is figyelembe vesszük, hogy egész számokat keresünk, akkor a vonalkázott tartományban, illetve a határán levő rácspontok koordinátáit kapjuk.



A megoldások:

$$
\begin{array}{lll}
A(-2;4) & x_1 = -2; & y_1 = 4; \\
B(-1;4) & x_2 = -1; & y_2 = 4; \\
C(0;5) & x_3 = 0; & y_3 = 5; \\
D(1;4) & x_4 = 1; & y_4 = 4; \\
E(2;4) & x_5 = 2; & y_5 = 4.
\end{array}
$$

2. *a) Az egyszerű hétpontú gráf csúcsainak foka rendre* $3, 2, 4, 1, 2$; *a másik kettőt nem ismerjük. Állapítsuk meg ezeket, ha a gráfnak* 11 *éle van, valamint a gráf megrajzolható egy folytonos vonallal úgy, hogy mindegyik élén pontosan egyszer haladtunk át.*

b) Adjunk meg három különböző irracionális számot úgy, hogy a három szám összege és bármelyik kettő szorzata is racionális szám legyen.

c) Mutassuk meg, hogy az A *és* B *kijelentések tetszőleges logikai értékére igaz a* $\neg(A \rightarrow B) = A \wedge \neg B$ *egyenlőség.*

(*12 pont*)

Megoldás. *a)* Az egyszerű gráf csúcsai fokainak összege az élek számának kétszerese, ezért az ismeretlen fokszámok összege 10. A hétpontú gráf csúcsának foka legfeljebb 6 lehet, így a két fokszám 5, 5 vagy 4, 6. Az utolsó feltétel miatt a megoldás 4, 6, mert a másik esetben négy páratlan foka volna a gráfnak, ekkor azonban nem lenne nyitott Euler-vonala. Mivel ekkor van 6-odfokú csúcs, így a gráf összefüggő is, és ezért van nyitott Euler-vonala.

b) Pl.: $i_1 = \sqrt{2}$,$i_2 = 2\sqrt{2}$, $i_3 = -3\sqrt{2}$. A számok irracionálisak és különbözőek.

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0; \quad i_1 \cdot i_2 = 4; \quad i_1 \cdot i_3 = -6; \quad i_2 \cdot i_3 = -12.$$

c) *I. megoldás.* Készítsük el az igazságtáblázatot:

A	B	$A \to B$	$\neg(A \to B)$	$A \wedge \neg B$
i	i	i	h	h
i	h	h	i	i
h	i	i	h	h
h	h	i	h	h

Az utolsó két oszlopban rendre ugyanazok a logikai értékek vannak, tehát a két kifejezés egyenlő.

II. megoldás. Ismert az $A \to B = \neg A \vee B$ azonosság. $\neg(A \to B) = \neg(\neg A \vee B)$, most alkalmazzuk a De-Morgan azonosságot: $\neg(\neg A \vee B) = \neg\neg A \wedge \neg B = A \wedge \neg B$.

3. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a*

$$\sin x + \cos x = \frac{1 - \sin(2x)}{\cos(2x)}$$

egyenletet.

(*13 pont*)

Megoldás. Kikötés: $\cos(2x) \neq 0$; alakítsuk az egyenlet jobb oldalát:

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \\ &= \frac{(\cos x - \sin x)^2}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}; \\ (\sin x + \cos x)^2 &= \cos x - \sin x,\end{aligned}$$

(itt egy újabb feltétel adódott: $\cos x \geq \sin x$),

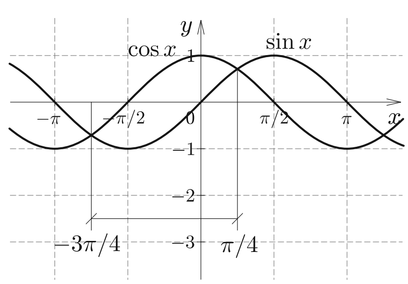
$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \cos x - \sin x, \quad 1 + \sin(2x) = \cos x - \sin x.$$

Emeljünk négyzetre:

$$\begin{aligned}1 + 2\sin(2x) + \sin^2(2x) &= 1 - \sin(2x), \\ \sin^2(2x) + 3\sin(2x) &= 0, \\ \sin(2x)\big[\sin(2x) + 3\big] &= 0,\end{aligned}$$

ahonnan $\sin(2x) = 0$, vagy $\sin(2x) + 3 = 0$. Ez utóbbi lehetetlen, így $2x = k\pi$, $x = \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. A $\cos\left(2 \cdot \dfrac{k\pi}{2}\right) \neq 0$ feltételnek megfelelnek a gyökök, mert a bal oldal értéke 1, vagy -1, attól függően, hogy k páros, vagy páratlan.

A $\cos x \geq \sin x$ egyenlőtlenség megoldását a függvények grafikonjainak ismeretében leolvassuk:



Ezt figyelembe véve a megoldások: $x_1 = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$; $x_2 = 2l\pi$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

(Ellenőrzéssel is meggyőződhetünk eredményeink helyességéről: az első gyökre $-1 = -1$, a másodikra $1 = 1$ adódik, míg a $\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$-re, illetve a $(2l+1)\pi$-re $1 = -1$-et kapunk, ezek tehát nem gyökök.)

4. *Két horgászegyesület, az Aligai Pecások és a Bélatelepi Horgászok közös edzőtáborozást tartottak 47 fő részvételével. A csapatokban felnőtt és junior korosztályú csoportok voltak. Tudjuk, hogy:*

a) minden csoport létszáma prímszám;

b) legkevesebben a junior Bélatelepi Horgászok, legtöbben a felnőtt Aligai Pecások vannak a táborban;

c) a felnőtt versenyzők összlétszáma osztható tízzel;

d) a két csapat felnőtt tagjainak létszáma között 10-nél kisebb a különbség.

Hányan vannak az egyes csoportokban?

(*14 pont*)

Megoldás. Vezessük be a következő jelöléseket: felnőttek A, B; juniorok a, b a csapatok kezdőbetűinek megfelelően. Így felírhatjuk az $A+a+B+b=47$ egyenletet, ahol az ismeretlenek pozitív prímek. Azonnal láthatjuk, hogy az egyik a 2, hiszen különben az összegnek párosnak kellene lennie. A *b*) feltétel alapján ez a b, vagyis két junior Bélatelepi Horgász van a táborban.

Ezután $A+a+B=45$, $a=45-(A+B)$. A *c*) feltétel szerint $A+B$ osztható 10-zel, így a jobb oldal osztható 5-tel, mivel prím, $a=5$.

$A+B=40$ (itt példát láthatunk a Goldbach-sejtésre, mely szerint minden 2-nél nagyobb páros szám felírható két prímszám összegeként). Több lehetőség is van, ezek: $3+37=11+29=17+23=40$.

A *b*) és *d*) feltételeket figyelembe véve a megoldás: $A=23$; $B=17$; $a=5$; $b=2$.

Az edzőtáborban 23 felnőtt és 5 junior Aligai Pecás, 17 felnőtt és 2 junior Bélatelepi Horgász van.

II. rész

5. *Egy húrnégyszög egyúttal érintőnégyszög is (bicentrikus négyszög). Két szomszédos oldala* 9, 10 *egység, az általuk bezárt szög* 60°. *Jelöljük O-val a körülírt, K-val a beírt kör középpontját.*

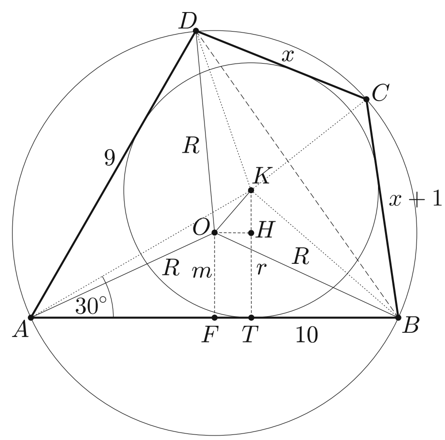
a) *Adjuk meg a másik két oldal hosszát.*

b) *Határozzuk meg a beírt- és a köréírt kör sugarát.*

c) *Milyen hosszú a KO távolság?*

(*16 pont*)

Megoldás. *a*) Az *ábra* jelöléseivel az érintőnégyszögre vonatkozó tétel szerint $AB+CD=DA+BC$.



Legyen $CD=x$, ekkor $BC=x+1$. Ha a $DAB\sphericalangle=60^\circ$, akkor a húrnégyszögekre igaz tétel miatt $BCD\sphericalangle=120^\circ$. Írjuk fel a koszinusz-tételt az $ABD\triangle$ BD oldalára:

$$BD^2=9^2+10^2-2\cdot 9\cdot 10\cdot\frac{1}{2},$$
$$BD^2=91,\quad BD=\sqrt{91};$$

majd írjuk fel a $BCD\triangle$-ben is a BD oldalra:

$$91=x^2+(x+1)^2-2x\cdot(x+1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right),$$
$$91=x^2+x^2+2x+1+x^2+x,$$
$$90=3x^2+3x\ \Rightarrow\ 0=x^2+x-30;$$
$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{121}}{2}\quad\Rightarrow\ x=5;\quad CD=5,\quad BC=6.$$

b) Az $ABD\triangle$ körülírt körének – ami egyúttal a négyszögnek is körülírt köre – sugara az ismert tétel szerint:

$$R=\frac{BD}{2\sin 60^\circ}=\frac{\sqrt{91}}{2\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{91}{3}}.$$

A négyszög területe:

$$T=\frac{9\cdot 10\cdot\sin 60^\circ}{2}+\frac{5\cdot 6\cdot\sin 120^\circ}{2}=30\sqrt{3}.$$

Használhatjuk Brahmagupta képletét is: $T = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, ahol $s = \dfrac{a+b+c+d}{2} = 15$, tehát $T = \sqrt{5 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 10} = \sqrt{2700} = 30\sqrt{3}$, vagy pedig a bicentrikus négyszögek területképletét: $T = \sqrt{abcd}$.

A beírt kör sugarát legegyszerűbben az érintősokszögekre érvényes $sr = T$ összefüggés alkalmazásával kaphatjuk meg: $15r = 30\sqrt{3} \Rightarrow r = 2\sqrt{3}$.

c) I. megoldás. Az ATK derékszögű háromszögben $\operatorname{ctg} 30° = \dfrac{AT}{r} \Rightarrow AT = 6 \Rightarrow OH = FT = AT - AF = 1$.

Írjuk fel a Pitagorasz-tételt az AFO derékszögű háromszögben:

$$5^2 + m^2 = R^2 \Rightarrow m^2 = \frac{91}{3} - 25 = \frac{16}{3}; \quad m = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3};$$
$$HK = r - m = 2\sqrt{3} - \frac{4\sqrt{3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Végül $OK^2 = OH^2 + HK^2$; $OK^2 = 1^2 + \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$; $OK = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$.

II. megoldás. Ha már kiszámítottuk a sugarakat, és ismerjük a bicentrikus négyszögek köreinek sugaraira, és e körök középpontjainak távolságára vonatkozó összefüggést, akkor a távolságot innen is megkaphatjuk. Az összefüggés:

$$\frac{1}{(R-d)^2} + \frac{1}{(R+d)^2} = \frac{1}{r^2},$$

ahol R a körülírt kör, r a beírt kör sugara, d a középpontok távolsága.

$$\frac{(R+d)^2 + (R-d)^2}{(R-d)^2(R+d)^2} = \frac{1}{r^2};$$
$$\frac{R^2 + 2Rd + d^2 + R^2 - 2Rd + d^2}{(R^2-d^2)^2} = \frac{1}{r^2}; \quad 2r^2(R^2+d^2) = (R^2-d^2)^2.$$

Helyettesítsük be a sugarakat:

$$2(2\sqrt{3})^2\left(\frac{91}{3} + d^2\right) = \left(\frac{91}{3} - d^2\right)^2;$$
$$24\left(\frac{91}{3} + d^2\right) = \frac{8281}{9} - \frac{182}{3}d^2 + d^4;$$
$$728 + 24d^2 = \frac{8281}{9} - \frac{182}{3}d^2 + d^4 \qquad / \cdot 9$$
$$6552 + 216d^2 = 8281 - 546d^2 + 9d^4;$$
$$0 = 9d^4 - 762d^2 + 1729,$$
$$(d^2)_{1,2} = \frac{762 \pm \sqrt{762^2 - 36 \cdot 1729}}{18} = \frac{762 \pm 720}{18},$$

$d_1^2 = \dfrac{1482}{18} = \dfrac{247}{3} \Rightarrow d_1 = \sqrt{\dfrac{247}{3}} \approx 9{,}07$, ez azonban nem jó, mert $d < R$.

$d_2^2 = \dfrac{42}{18} = \dfrac{7}{3} \Rightarrow d = \sqrt{\dfrac{7}{3}} = \dfrac{\sqrt{21}}{3}$, ami egyezik az első megoldás eredményével.

Megjegyzés: Brahmagupta tételének levezetését több helyen, pl. Dr. Gerőcs László: *Azok a csodálatos húrnégyszögek* című könyvében is megtalálhatjuk. A bicentrikus négyszögekre vonatkozó tétel bizonyítását pl. Nemecskó István: *Bicentrikus négyszögek* (matematika.elte.hu/wp-content/uploads/2017/03/NemecskoIstvan.pdf) címen érhetjük el.

6. *a) Vizsgáljuk meg az $a_n = n^3 - n^2$ sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából. Állításainkat igazoljuk.*
b) Mutassuk meg, hogy a sorozat első n tagjának összege

$$\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12}.$$

(16 pont)

Megoldás. *a)* A sorozat első néhány tagját kiszámolva 0, 4, 18, 48, 100, ... adódik, amiből a szigorúan monoton növekedés látszik. Igazolnunk kell, hogy $a_n < a_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{Z}^+$ esetén, tehát

$$n^3 - n^2 < (n+1)^3 - (n+1)^2; \quad n^3 - n^2 < n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^2 - 2n - 1;$$

rendezve: $0 < 3n^2 + n$, ami minden pozitív egészre fennáll. Idáig ekvivalens lépéseken át jutottunk, ezért a kiinduló állítás is igaz.

A sorozat alulról korlátos, negatív tagja nincs, így tetszőleges negatív szám jó alsó korlátnak, felülről nem korlátos, azaz bármely pozitív K-hoz található n_0 küszöbindex, hogy minden $n > n_0$ esetén $a_n > K$ teljesül.

(A küszöbindex nem lesz „éles", ehhez egy harmadfokú egyenletet kellene megoldani.) Tekintsük a $b_n = \frac{n^3}{2}$ sorozatot.

Az $a_n > b_n$; $n^3 - n^2 > \frac{n^3}{2}$; $\frac{n^3}{2} - n^2 > 0$; $\frac{n^2}{2}(n-2) > 0$, minden $n > 2$-re teljesül.

Oldjuk meg a $b_n > K$ egyenlőtlenséget: $\frac{n^3}{2} > K$; $n > \sqrt[3]{2K}$. Mivel $a_n > b_n$, ezért bármely nagy pozitív K-hoz küszöbindexnek választhatjuk a $\sqrt[3]{2K}$ egészrészét. Beláttuk tehát, hogy az a_n sorozat felülről nem korlátos. (Jelölhetjük ezt úgy is, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.)

b) *I. megoldás* teljes indukcióval. $n = 1$-re igaz, tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re, azaz

$$\sum_{i=1}^{n}(i^3 - i^2) = \frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{12}.$$

Bizonyítjuk, hogy fennáll $n+1$-re is, vagyis

$$S_n + a_{n+1} = S_{n+1}.$$

$$\frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{12} + (n+1)^3 - (n+1)^2 =$$
$$= \frac{(n+1)\big[(n+1)-1\big]\big[(n+1)+1\big]\big[3(n+1)+2\big]}{12}, \quad / : (n+1); \quad \cdot 12$$
$$n(n-1)(3n+2) + 12(n+1)^2 - 12(n+1) = n(n+2)(3n+5),$$
$$(n^2-n)(3n+2) + 12n^2 + 24n + 12 - 12n - 12 = (n^2+2n)(3n+5),$$
$$3n^3 - 3n^2 + 2n^2 - 2n + 12n^2 + 12n = 3n^3 + 6n^2 + 5n^2 + 10n,$$
$$3n^3 + 11n^2 + 10n = 3n^3 + 11n^2 + 10n,$$

ekvivalens lépéseken keresztül azonosságot kaptunk, tehát a kiinduló egyenlőség is igaz, ezzel a képlet helyességét igazoltuk.

II. megoldás. Ismert, hogy $\sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; illetve $\sum\limits_{i=1}^{n} i^3 = \big[\frac{n(n+1)}{2}\big]^2$. Ezeket felhasználva

$$\sum_{i=1}^{n}(i^3 - i^2) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2} - \frac{2n+1}{3}\right] = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{3n(n+1) - 2(2n+1)}{6} =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{3n^2 + 3n - 4n - 2}{6} = \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{3n^2 - n - 2}{6} =$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(n-1)(3n+2)}{6} = \frac{n(n-1)(n+1)(3n+2)}{12}.$$

7. *Anna és Bálint szabályos dobókockával játszik. Felváltva dobnak, ha a dobott szám prímszám, akkor a számegyenesen álló bábuval egyet jobbra, ha összetett szám, akkor egyet balra lépnek. Ha egyik sem, akkor a bábu helyben marad. A bábu kezdetben a nullán áll, összesen hatszor fognak dobni. Előtte fogadnak arra, hogy a játék végén melyik számon áll majd a bábu. Anna az egyesre, Bálint a kettesre fogad.*

a) *Kinek mekkora esélye van a nyerésre?*

Tegyük fel, hogy Anna nyerte a fogadást.

b) *Mennyi a valószínűsége, hogy a játék során egyszer dobtak egyest?*

(*16 pont*)

Megoldás. *a*) Prímszámok: 2, 3, 5; összetett számok: 4, 6; egyik sem: 1. Annak esélye, hogy a bábu egy dobás után jobbra lép $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, jelöljük ezt p_{jobbra}-val. Hasonlóképpen: $p_{\text{balra}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, $p_{\text{helyben}} = \frac{1}{6}$.

Számítsuk ki Anna nyerési esélyét. Ahhoz, hogy 6 dobás után a bábu az 1-esen álljon, az alábbiak szerint léphetett (tetszőleges sorrendben):

$$\text{jhhhhh; ennek valószínűsége:}\quad 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^5 = \frac{1}{2592},$$

vagy

$$\text{jjbhhh; ennek valószínűsége:}\quad \frac{6!}{2!\cdot 3!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{60}{2592},$$

vagy

$$\text{jjjbbh; ennek valószínűsége:} \quad \frac{6!}{3!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^1=\frac{360}{2592}.$$

Anna nyerési esélye ezek összege: $P(\text{Anna nyert})=\dfrac{421}{2592}\approx 0{,}1624$.

Hat dobás után a 2-esre a következőképpen kerülhetett a bábu (a lépések sorrendje tetszőleges):

$$\text{jjhhhh; ennek valószínűsége:} \quad \frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{5}{1728},$$

vagy

$$\text{jjjbhh; ennek valószínűsége:} \quad \frac{6!}{3!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{120}{1728},$$

vagy

$$\text{jjjjbb; ennek valószínűsége:} \quad \frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^0=\frac{180}{1728},$$

$$P(\text{Bálint nyert})=\frac{5}{1728}+\frac{120}{1728}+\frac{180}{1728}=\frac{305}{1728}=\approx 0{,}1765.$$

b) Jelölje A azt az eseményt, hogy Anna nyert; C, hogy egyszer dobtak egyest.

$$P(AC)=\frac{360}{2592};\quad P(A)=\frac{421}{2592},\quad P(C\mid A)=\frac{P(AC)}{P(A)}=\frac{\frac{360}{2592}}{\frac{421}{2592}}=\frac{360}{421}\approx 0{,}8551.$$

8. *A 2 egység élű kocka egyik csúcsát jelöljük A-val, majd állítsunk egyenlő hosszú szakaszokat a kocka A-val érintkező lapjainak középpontjába, az adott lapokra merőlegesen kifelé.*

A szakaszok lapra nem illeszkedő végpontjait jelöljük P, Q, R-rel.

a) Milyen hosszúak a szakaszok, ha az A, P, Q, R pontok egy síkban vannak?

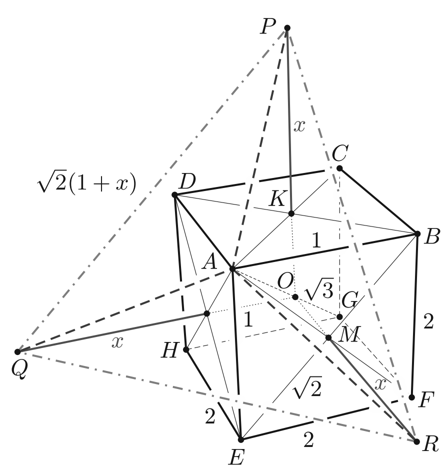
A 2 egység élű kocka lapjaira kifelé egyenlő magasságú, 2 egység oldalú négyzet alapú egyenes gúlákat helyezünk úgy, hogy a gúla alapja egybeesik a kocka adott lapjával.

b) Mekkora a gúla magassága, ha az így kapott testnek van körülírt és beírt gömbje?

c) Mekkora a gúla magassága abban az esetben, ha az így keletkezett poliédernek 14 *csúcsa,* 12 *lapja és* 24 *éle lett?*

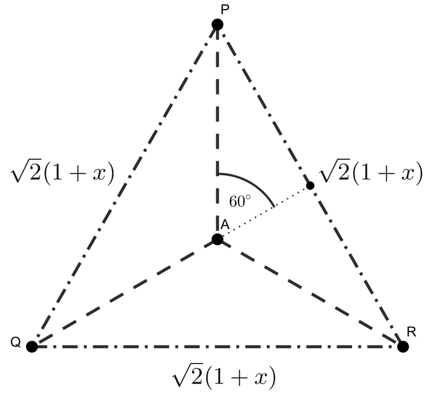
(16 pont)

Megoldás. *a*) *I. megoldás.* A kocka középpontja O, a felső lapközéppont K. Az $OKA\sphericalangle=90^\circ$, $AOK\sphericalangle=\varphi$.



1. ábra

A kocka A-val érintkező lapjainak középpontjai által meghatározott sík merőleges az A-ból induló testátlóra. Ez ugyanaz a sík, mint amit az A-ból induló élek másik végén levő csúcsok határoznak meg, ezek pedig A-val együtt egy szabályos háromszög alapú, egyenlő oldalélű tetraédert alkotnak, amelynek az alaphoz tartozó magasság egyenese AO. Akkor lesz a négy pont egy síkban, ha $PAO\sphericalangle=90^\circ$ (és $QAO\sphericalangle=RAO\sphericalangle=90^\circ$). Ekkor az $AOK\triangle\cong POA\triangle$, mert két szögük ($\varphi$, 90°) egyenlő, $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{\sqrt3}=\dfrac{\sqrt3}{1+x}$, $1+x=3$ $\Rightarrow$ $x=2$. Az A, P, Q, R pontok akkor lesznek egy síkban, ha a merőleges szakaszok hossza 2 egység.



2. ábra

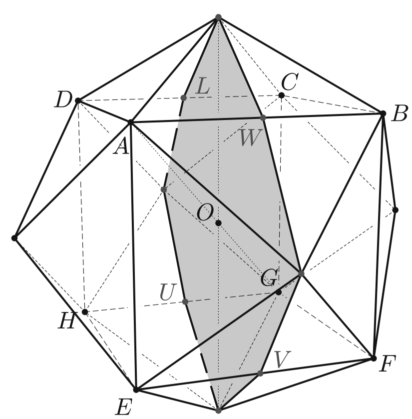
II. megoldás. A QOP háromszögben O-nál derékszög van, a QO befogó és OP befogó $1+x$, ezért a QP átfogó $\sqrt{2}(1+x)$ (QR, RP hasonlóképpen), $AP=AQ=AR=\sqrt{2+x^2}$ (AKP derékszögű háromszög befogói $\sqrt{2}$ és x, átfogó AP, a másik kettő ugyanígy). Ha a négy pont egy síkban van, akkor a PQR szabályos háromszög körülírt körének középpontja A (mert egyenlő távol van a csúcsoktól), ezért a $PAR\sphericalangle=120°$. Innen kétféleképpen is befejezhetjük:

1.
$$\sin 60° = \frac{\frac{\sqrt{2}(1+x)}{2}}{\sqrt{2+x^2}}; \quad \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2+x^2} = \frac{\sqrt{2}(1+x)}{2};$$
$$3(2+x^2) = 2(1+x)^2;$$
$$6+3x^2 = 2+4x+2x^2; \quad x^2-4x+4=0;$$
$$(x-2)^2 = 0 \;\Rightarrow\; x=2.$$

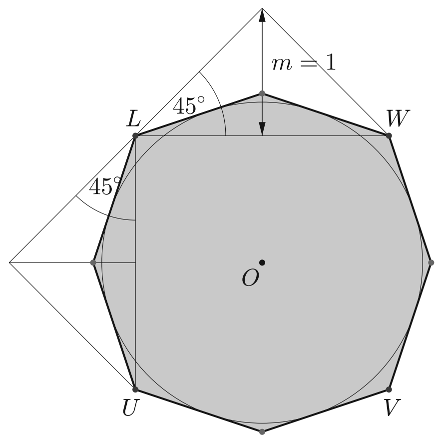
2. Írjuk fel a koszinusz-tételt RP-re:

$$\left[\sqrt{2}(1+x)\right]^2 =$$
$$= 2+x^2+2+x^2-2(2+x^2)\left(-\frac{1}{2}\right);$$
$$2(1+2x+x^2) = 3x^2+6 \;\Rightarrow\; x=2.$$

b) A kocka körülírt gömbjének sugara $\sqrt{3}$. Ha a gúlák ötödik (a kocka csúcsaitól különböző) csúcsa is ezen a gömbön van, akkor magasságuk $m=\sqrt{3}-1$. Ebben az esetben beírt gömbje is van a testnek, mint az a metszeten látható, mert a magasság kisebb 1-nél. (Akkor nincs beírt gömb, ha a gúlák magassága nagyobb 1-nél, ugyanis ekkor L-nél, U,V,W-nél konkáv szög keletkezik.)



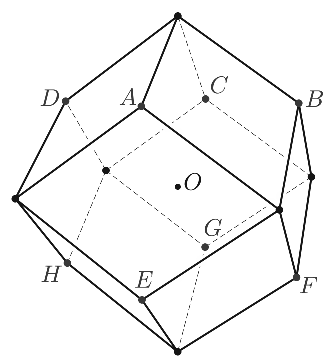
3. ábra



4. ábra

A megoldás tehát: $m = \sqrt{3} - 1$.

c) A *3. ábra* szerinti testeknek „általában” 24 lapjuk (14 csúcsuk és 36 élük) van. Ahhoz, hogy a lapok száma felére változzon, az kell, hogy két olyan háromszög, melyek egy eredeti kocka élben közös oldallal rendelkeztek, egy síkba kerüljenek, azaz a poliédernek egy lapját alkossák. Ez akkor következik be, ha a gúlák magassága 1 egység, ugyanis ebben az esetben az oldallapok az alaplappal 45°-os szöget zárnak be. Most az élek száma 12-vel csökken, hiszen eltűnnek a kocka élei, így az élek száma 24 lesz, a csúcsok száma nem változik. Az $m = 1$ magasságú gúlák tehát olyan poliédert eredményeznek, melyeknek 14 csúcsuk, 12 lapjuk és 24 élük van (*5. ábra*), más magasság esetén a lapok, élek száma ettől különböző. A megoldás: $m = 1$.



5. ábra

Megjegyzés. A kapott poliéder jó példa arra, attól, hogy egy testet egybevágó síkidomok határolnak, nem biztos, hogy szabályos test az illető. Ezt a testet ugyanis egybevágó rombuszok határolják, de különböző térszögleteik miatt mégsem szabályos a test.

9. *Legyen $f(x) = 2x^2 - x^3$; $x \in [0; 2]$. Az $f(x)$ függvény grafikonjához illesztettünk jobbról egy y tengellyel párhuzamos tengelyű parabolát, amelyre az alábbiak egyszerre teljesülnek:*

a) a két görbe törésmentesen csatlakozik egymáshoz a 2 abszcisszájú pontban;

b) a parabola és az x tengely által közrefogott síkidom területe egyenlő az $f(x)$ grafikonja és az x tengely által bezárt síkidom területével.

Adjuk meg a parabola egyenletét.

(16 pont)

Megoldás. A parabola vehető a $g(x) = a\ (x - b)^2 + c$ függvény grafikonjának, ahol a, b, c alkalmas ($a > 0$) konstans. Ahhoz, hogy a két görbe csatlakozzon egymáshoz az $x = 2$ abszcisszájú pontban, az kell, hogy $f(2) = g(2)$, a törésmentességhez pedig: $f'(2) = g'(2)$,

$$f(2) = 2 \cdot 2^2 - 2^3 = 0; \quad g(2) = a(2 - b)^2 + c \ \Rightarrow$$

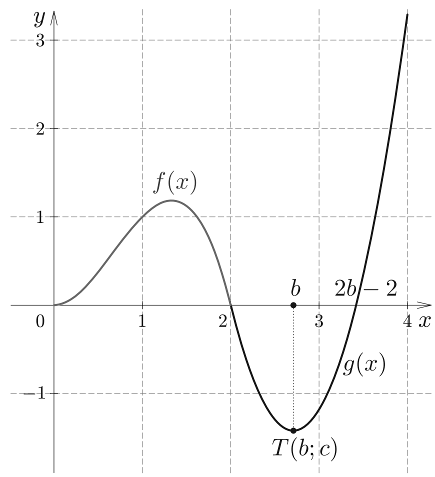
$$0 = a(2 - b)^2 + c, \tag{1}$$

$$f'(x) = 4x - 3x^2; \quad g'(x) = 2a(x - b); \quad f'(2) = 4 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 = -4;$$

$$-4 = 2a(2 - b). \tag{2}$$

Az $f(x)$ függvény grafikonja és az x tengely által bezárt síkidom területéhez először meg kell oldanunk a $0 = 2x^2 - x^3$ egyenletet. $0 = x^2(2-x) \ \Rightarrow \ x_1 = 0;\ x_2 = 2$,

$$T = \int_0^2 (2x^2 - x^3)\,\mathrm{d}x = \left[2 \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 = 2 \cdot \frac{8}{3} - \frac{16}{4} = \frac{4}{3}.$$



A $g(x)$ függvény grafikonjának szimmetriáját kihasználva kaphatjuk az integrálás határait. A kezdőpont nyilván a 2, a végpont pedig: $2(b-2)+2 = 2b-2$. Mivel a síkidom az x tengely alatt van,

$$-\frac{4}{3} = \int_2^{2b-2} \left[a(x-b)^2 + c\right]\mathrm{d}x = \left[a\frac{(x-b)^3}{3} + cx\right]_2^{2b-2} =$$

$$= a\frac{(b-2)^3}{3} + c(2b-2) - \left[a\frac{(2-b)^3}{3} + 2c\right] =$$

$$= \frac{2}{3}a(b-2)^3 + 2bc - 4c = \frac{2}{3}a(b-2)^3 + 2c(b-2).$$

Megkaptuk tehát a harmadik egyenletet:

(3) $$-\frac{4}{3} = \frac{2}{3}a(b-2)^3 + 2c(b-2).$$

(2)-ből kifejezzük $(b-2)$-t:

$$b - 2 = \frac{2}{a},$$

(1)-et felhasználva:

$$0 = a\left(-\frac{2}{a}\right)^2 + c \ \Rightarrow \ c = -\frac{4}{a}.$$

Behelyettesítve (3)-ba:

$$-\frac{4}{3} = \frac{2}{3}a\left(\frac{2}{a}\right)^3 + 2\left(-\frac{4}{a}\right)\frac{2}{a}; \quad -\frac{4}{3} = \frac{16}{3a^2} - \frac{16}{a^2} \quad \Big/ \cdot (-3a^2);$$

$$4a^2 = -16 + 48; \quad a^2 = 8 \ \Rightarrow \ a = 2\sqrt{2} \ \ (a > 0);$$

$$c = -\frac{4}{2\sqrt{2}} = -\sqrt{2}; \quad b = 2 + \frac{2}{2\sqrt{2}} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4+\sqrt{2}}{2}.$$

A parabola egyenlete:

$$y = 2\sqrt{2}\left(x - \frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \sqrt{2} \quad (y = g(x)).$$