*Igazoljuk, hogy minden valós $x$-re*

$$(\sin x+2\cos 2x)(2\sin 2x-\cos x)<4{,}5. \tag{1}$$

**I. megoldás.** Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát 2-vel. A $\cos 3x=\cos x\ \cos 2x-\sin x\ \sin 2x$, valamint a $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\ \cos\alpha$ azonosságokat felhasználva (1) a következő alakra hozható:

$$4\sin 4x-\sin 2x-4\cos 3x<9. \tag{2}$$

Mivel $\sin 4x$, $-\sin 2x$ és $-\cos 3x$ értéke legfeljebb 1, azért (2) bal oldalának értéke legfeljebb $4+1+4=9$ minden $x$-re. Így a feladat állításához elég belátnunk, hogy ez az érték nem lehet 9, azaz $\sin 4x=1$, $-\sin 2x=1$ és $-\cos 3x=1$ egyszerre nem állhatnak fönn. De ez nyilvánvaló, hiszen ha $-\sin 2x=1$, akkor $\sin 4x=0$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

*Károlyi Gyula*, (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

**II. megoldás.** Ismeretes, hogy $|\sin x|+|\cos x|\leqq\sqrt{2}$, és hogy itt egyenlőség csak $|\sin x|=|\cos x|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ mellett lehet. Emiatt $|\sin 2x|+|\cos 2x|\leqq\sqrt{2}$, és nem lehet a két helyen egyidejűleg egyenlőség. Így az (1) bal oldalán álló szorzat tényezőinek összegére kapjuk, hogy

$$|\sin x+2\cos 2x|+|2\sin 2x-\cos x|<3\sqrt{2},$$

amiből (1) a számtani és mértani közép közti összefüggés alapján következik.