I. rész

1. *a) Adott két függvény:*

$$f(x) = \frac{2x+9}{3}; \qquad g(x) = \sqrt{x^2+4x+4}\,.$$

Van-e olyan $x \in \mathbb{R}$, ahol a két függvény helyettesítési értéke megegyezik?

(6 pont)

b) Van-e olyan p valós szám, amelyre az alábbi két kifejezés értéke egyenlő:

$$A = \log_2(p+2) + \log_2(p-2); \qquad B = 1 + \log_2(p+10)?$$ *(6 pont)*

Megoldás. *a) 1. megoldás.* $g(x) = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2|$,

$$2x + 9 = 3 \cdot |x+2|.$$

Ha $x < -2$, akkor

$$2x + 9 = -3x - 6,$$
$$x = -3.$$

Ha $x \geq -2$, akkor

$$2x + 9 = 3x + 6,$$
$$x = 3.$$

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az ekvivalenciára való jogos hivatkozással.

2. megoldás. $2x + 9 = 3\sqrt{x^2+4x+4}$, ha $x \geq \dfrac{-9}{2}$, akkor négyzetre emelhetünk:

$$4x^2 + 36x + 81 = 9x^2 + 36x + 36,$$
$$9 = x^2,$$
$$x = \pm 3.$$

Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy az ekvivalenciára való jogos hivatkozással.

b)

$$\log_2(p+2) + \log_2(p-2) = 1 + \log_2(p+10).$$

Kikötés: $p > 2$,

$$\log_2(p^2-4) = \log_2(2p+20).$$

Mivel a $\log_2 x$ függvény szigorúan monoton:

$$p^2 - 4 = 2p + 20$$
$$p^2 - 2p - 24 = 0,$$
$$p_1 = -4; \;\; p_2 = 6.$$

Csak a $p = 6$ megoldás tesz eleget a feltételeknek. Az alaphalmazon ekvivalens átalakításokat végeztünk.

2. *Solymász tanár úr biológia órájára 26 végzős jár, és valamennyien részt vesznek imádott biológia tanáruk humánetológia óráján is. Félévkor a tanár úr (nevelő célzattal) meglehetősen szigorú volt, ezért 21-en nem kaptak ötöst biológiából és 19-en nem kaptak ötöst humánetológiából. Ugyanakkor 8-an kaptak ötöst legalább az egyik tárgyból.*

a) Hány végzős kapott ötöst mindkét tárgyból?

(4 pont)

A biológia próbaérettségit mind a 26 diák megírta. A tanár úr korábbi szigorúsága elérte célját, mert a próbaérettségi már sokkal jobban sikerült. Senki sem kapott elégtelen, vagy elégséges osztályzatot. A közepes, jó és jeles osztályzatok száma ebben a sorrendben egy mértani sorozat három egymást követő eleme lett. A csoport átlaga $\dfrac{60}{13}$ lett.

b) Számoljuk ki a próbaérettségi osztályzatainak szórását. Az eredményt két tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

(8 pont)

Megoldás. *a)* *1. megoldás.* 5 tanulónak van ötöse biológiából, 7 tanulónak van ötöse humánetológiából; $5+7=12$, de csak 8 tanulónak van legalább az egyik tárgyból ötöse, ezért mindkét tárgyból 4 tanulónak van ötöse.

2. megoldás. Ha mindkét tárgyból x tanulónak van ötöse, akkor csak biológiából $5-x$ tanulónak van ötöse. Csak humánetológiából $7-x$ tanulónak van ötöse.

$$5-x+x+7-x=8.$$

Tehát mindkét tárgyból 4 tanulónak van ötöse.

b) *1. megoldás.* A hármas, négyes és ötös osztályzatok száma: a, $a\cdot q$, $a\cdot q^2$.

$$a+aq+aq^2=26,$$
$$\frac{3a+4aq+5aq^2}{26}=\frac{60}{13}.$$

Mindkét egyenletből a-t kifejezve:

$$\frac{26}{1+q+q^2}=\frac{120}{3+4q+5q^2}.$$

Rendezés után:

$$5q^2-8q-21=0, \quad q_1=-\frac{7}{5};\ q_2=3.$$

Csak a $q=3$ felel meg a feladat feltételeinek, tehát 2 db hármas, 6 darab négyes és 18 darab ötös osztályzat született.

Az osztályzatok szórása: $0{,}6249\approx 0{,}62$.

2. megoldás. Legyen a hármasok száma a, a négyesek száma b, az ötösök száma c. Ekkor az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$a+b+c=26, \tag{I.}$$
$$\frac{3a+4b+5c}{26}=\frac{60}{13}, \tag{II.}$$
$$b^2=ac. \tag{III.}$$

Az első egyenletből: $a=26-b-c$. A második egyenletet átalakítva: $3a+4b+5c=120$. Az előző összefüggést beírva: $3(26-b-c)+4b+5c=120$. Ebből: $b=42-2c$ és $a=c-16$.

Így a harmadik egyenlet: $(42-2c)^2=(c-16)\cdot c$. Az egyenletet rendezve: $3c^2-152c+1764=0$, ennek megoldásai: $c_1=18$ és $c_2=\frac{98}{3}$.

Csak a $c=18$ felel meg a feladat feltételeinek, tehát 2 db hármas, 6 darab négyes és 18 darab ötös osztályzat született.

Az osztályzatok szórása: $0{,}6249\approx 0{,}62$.

3. *a) Határozzuk meg az $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2-24x+2$ függvény lokális maximumhelyét.*

(5 pont)

b) Mekkora területet zár be a $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x^2-6x-24$ függvény grafikonja és az x tengely?

(6 pont)

c) Mennyi az $a_n=\dfrac{11n-5}{3n+8}$ sorozat határértéke?

(3 pont)

Megoldás.

a) A deriváltfüggvény: $f'(x)=3x^2-6x-24$. A függvénynek ott lehet lokális szélsőértéke, ahol a derivált nulla.

$$3x^2-6x-24=0, \quad x_1=-2;\ x_2=4.$$

x	$x<-2$	$x=-2$	$-2<x<4$	$x=4$	$4<x$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	lok. max. h.	$\downarrow$	lok. min. h.	$\uparrow$

Vagy a táblázat helyett: A második derivált, $f''(x)=6x-6$, $f''(-2)=-18<0$ és $f''(4)=18>0$.

Tehát a függvénynek az $x=-2$ helyen van lokális maximuma.

b)

$$3x^2-6x-24=0, \quad x_1=-2;\ x_2=4,$$

$$T=\left|\int_{-2}^{4}(3x^2-6x-24)\,\mathrm{d}x\right|=\left|\left[x^3-3x^2-24x\right]_{-2}^{4}\right|=$$
$$=\left|(64-48-96)-(-8-12+48)\right|=108.$$

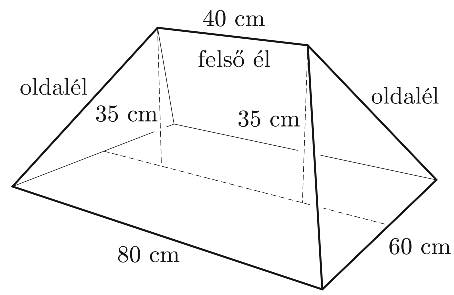
c)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{11n-5}{3n+8}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{11-\frac{5}{n}}{3+\frac{8}{n}}=\frac{11-0}{3+0}=\frac{11}{3}.$$

4. Peti bá' egy téglalap alapú babaházat készített a lányainak. A téglalap oldalai 60 cm és 80 cm. A babaházra egy levehető „sátortetőt” készített. A tető felső éle 40 cm hosszú, és a babaház téglalap alakú mennyezetének hosszabbik középvonala felett, attól 35 cm távolságra van. A tető oldalélei egyenlő hosszúak.

a) Számítsuk ki az oldalélek hosszát és a vízszintes síkkal bezárt szögüket.

(*7 pont*)

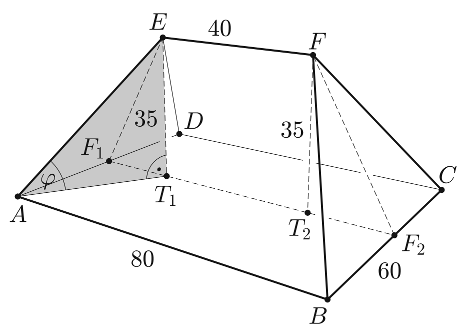


Zsófi a tető trapéz alakú részére egy téglalap alakú díszt szeretne felragasztani. A téglalap egyik oldala illeszkedik a trapéz alapvonalára, két csúcsa pedig a trapéz száraira.

b) Mekkora a legnagyobb területű téglalap területe, amelyet a megadott módon el lehet helyezni a tetőn? A választ négyzetcentiméterben, egész számra kerekítve adjuk meg.

(*6 pont*)

Megoldás. *a*) (Az *4.a. ábra* jelölései alapján.) Az oldalél hosszának kiszámítása:



4.a. ábra

1. lehetőség. Az AT_1F_1 derékszögű háromszögben $F_1T_1=20$ és $AF_1=30$. A Pitagorasz-tétel az AF_1T_1 derékszögű háromszögben: $AT_1=\sqrt{20^2+30^2}=10\sqrt{13}\approx 36{,}06$. Pitagorasz-tétel az AT_1E derékszögű háromszögben: $AE^2=AT_1^2+ET_1^2$.

$$AE=\sqrt{35^2+\left(10\sqrt{13}\right)^2}=\left(\sqrt{30^2+\left(5\sqrt{65}\right)^2}\right)=5\sqrt{101}\approx 50{,}25\text{ cm}$$

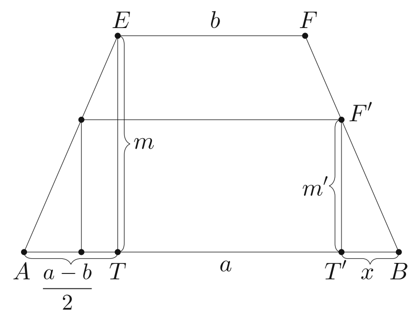
az oldalél hossza.

2. lehetőség. Pitagorasz-tétel az EF_1T_1 derékszögű háromszögben: $EF_1=\sqrt{20^2+35^2}=5\sqrt{65}\approx 40{,}31$. Pitagorasz-tétel az AF_1E derékszögű háromszögben: $AE^2=AF_1^2+EF_1^2$.

$$AE=\sqrt{35^2+\left(10\sqrt{13}\right)^2}=\left(\sqrt{30^2+\left(5\sqrt{65}\right)^2}\right)=5\sqrt{101}\approx 50{,}25\text{ cm}$$

az oldalél hossza.

Az oldalél vízszintes síkkal bezárt szöge a 4.a. ábrán φ-vel jelölt EAT_1 szög, amelyre $\sin\varphi=\dfrac{35}{5\sqrt{101}}\approx 0{,}6965$, ahonnan: $\varphi=44{,}15°$.



4.b. ábra

b) A *4.b. ábra* jelöléseit használva: $ATE\triangle \sim BT'F'\triangle$, mert szögeik egyenlők.

$$\frac{m'}{x}=\frac{2m}{a-b} \;\Leftrightarrow\; m'=\frac{2m}{a-b}\cdot x.$$

Ebből a téglalap területe:

$$T(x)=(a-2x)\cdot\frac{2m}{a-b}\cdot x=\frac{2m}{a-b}\cdot(-2x^2+ax)=-\frac{4m}{a-b}\cdot\left(x^2-\frac{a}{2}\cdot x\right)=$$
$$=-\frac{4m}{a-b}\cdot\left(\left(x-\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{16}\right)=-\frac{4m}{a-b}\cdot\left(x-\frac{a}{4}\right)^2+\frac{ma^2}{4(a-b)}.$$

Tehát a terület maximális, ha $x=\frac{a}{4}=20$ cm.

II. rész

5. *A DÖ* 900 *pólót rendelt E5vös Napra. A pólókat két géppel nyomtatták. A gépeket kezdetben rosszul állították be, ezért az első gép (Horribile dictu!) a rajta nyomtatott* 400 *póló* 2%*-ára tévesen, az E5vös helyett az Eötvös feliratot nyomtatta, és a másik gép ugyanezt a hibát követte el a rajta nyomtatott pólók* 3,4%*-ával. A minőségellenőrzéskor Bocó a* 900 *alaposan összekevert pólóból véletlenszerűen kiválasztott egyet, és azon hibás volt a felirat. (Ezen persze kellőképpen elkeseredett …)*

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a hibás pólót a második gépen nyomtatták?

(5 pont)

A DÖ úgy döntött, hogy a hibásan nyomtatott póló árából először 500 Ft *árengedményt ad, de a kereslet nagyon minimális volt, ezért az új árat még tovább kellett csökkenteni, annak p%-ával. Így a póló* 50 Ft*-tal drágább lett, mintha először engedték volna le az árát p%-kal és utána* 500 Ft*-tal, viszont* 90 Ft*-tal olcsóbb lett, mint ha mindkétszer az aktuális ár p%-ával csökkentették volna az árát.*

b) Mennyi volt a póló eredeti ára, és hány százalékos volt a csökkentés?

(11 pont)

Megoldás. *a) 1. megoldás.* Az első gépen 8, a második gépen 17 hibás pólót nyomtattak. Tehát 25 hibás póló van, ez az összes esetek száma. A kedvező esetek száma a második gépen készült pólók száma, azaz 17.

Így a kérdéses valószínűség: $\frac{17}{25}=0{,}68$.

2. megoldás. Az első gépen 8, a második gépen 17 hibás pólót nyomtattak. Legyen A az az esemény, hogy a pólót a második gépen nyomtatták, B pedig az az esemény, hogy a kiválasztott póló hibás.

A keresett valószínűség: $p(A\mid B)=\frac{p(AB)}{p(B)}$.

$$p(AB)=\frac{17}{900},\qquad p(B)=\frac{25}{900},\qquad p(A\mid B)=\frac{\frac{17}{900}}{\frac{25}{900}}=\frac{17}{25}=0{,}68.$$

3. megoldás. Annak valószínűsége, hogy egy póló az első gépen készült: $p(1.)=\frac{4}{9}$.

Annak valószínűsége, hogy egy póló a második gépen készült: $p(2.)=\frac{5}{9}$.

Annak valószínűsége, hogy egy póló hibás, ha az első gépen készült: $p(H\mid 1.)=0{,}02$.

Annak valószínűsége, hogy egy póló hibás, ha a második gépen készült:
$p(H\mid 2.)=0{,}034$.

Bayes tétele alapján annak valószínűsége, hogy egy póló a második gépen készült, feltéve, hogy hibás:

$$p(2. \mid H) = \frac{p(H \mid 2.) \cdot p(2.)}{p(H \mid 1.) \cdot p(1) + p(H \mid 2.) \cdot p(2.)}.$$

Tehát a keresett valószínűség:

$$\frac{0{,}034 \cdot \frac{5}{9}}{0{,}02 \cdot \frac{4}{9} + 0{,}034 \cdot \frac{5}{9}} = 0{,}68.$$

b) Legyen x a póló árleszállítás előtti ára forintban, és legyen $q = 1 - \dfrac{p}{100}$. Ha a két árleszállítás fordított sorrendben történt volna, akkor a póló kétszeres árleszállítás utáni ára $xq - 500$ forint, tehát

$$(xq - 500) + 50 = (x - 500) \cdot q.$$

Ha mindkét alkalommal $p\%$ a csökkentés, akkor az új ár xq^2 forint, tehát

$$(x - 500) \cdot q + 90 = xq^2.$$

Az első egyenletből $q = 0{,}9$, azaz $p = 10$. A q értékét a második egyenletbe behelyettesítve:

$$(x - 500) \cdot 0{,}9 + 90 = x \cdot 0{,}81,$$

$x = 4000$. A póló eredeti ára 4000 Ft, p értéke pedig 10.

Ellenőrzés: $4000 - 500 = 3500$, 10%-kal csökkentve 3150;
4000 csökkentve 10%-kal 3600, $3600 - 500 = 3100$;
4000 csökkentve 10%-kal 3600, újabb 10%-kal csökkentve 3240.

$3150 = 3100 + 50$ és $3150 = 3240 - 90$, tehát a kapott eredmények helyesek.

6. Fixi kerékpárunkon az első lánctányéron 46 fog található, a hátsó fogaskeréken pedig 18 fog van. (Az első lánctányérhoz rögzítik a pedált, a hátsó fogaskerék pedig a hátsó keréken van.)

1. ábra

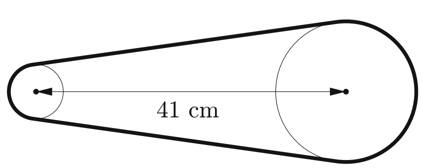
Az *1. ábrán* a lánc felülnézeti képe látható, a második ábrán pedig az, hogy miként illeszkedik a lánc a fogaskerékre. Két láncszem tengelye 1,27 cm távolságra van egymástól (lásd *2. ábra*).

2. ábra

a) Milyen hosszú lánc férne az első lánctányérra, ha teljesen körbetekernénk lánccal?

(*3 pont*)

A két fogaskerék (a pedál és a hátsó tengely) középpontja 41 cm van egymástól (*3. ábra*) és a lánc teljesen feszes.



3. ábra

b) Milyen hosszú lánc van a kerékpáron? (Válaszunkat centiméterben, két tizedesjegy pontossággal adjuk meg.)

(*10 pont*)

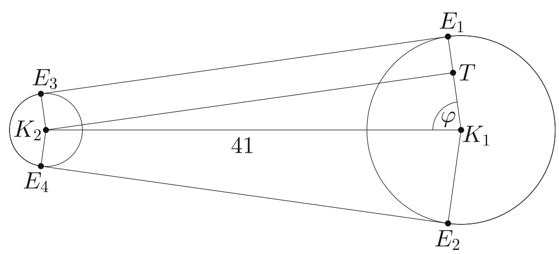
A láncokat gyártó üzemben 160 láncszemből álló láncdarabokat készítenek. A mérések alapján a láncdarabok 2%-ában egy szemmel kevesebb van, mint az előírás. A láncszemek számát egy számítógép ellenőrzi egy futószalagon. A futószalag különböző pontjain véletlenszerűen kiválaszt egy láncdarabot és meghatározza, hány láncszemből áll, de a futószalag folyamatosan mozog, ezért nem lehet kiemelni a hibás láncdarabot. Ennek megfelelően akár az az extrém eset is előfordulhat, hogy ugyanazt a láncdarabot ellenőrzi csak, akár többször is. Egy félórás időintervallumban 5000 láncdarab kering a futószalagon.

c) Határozzuk meg a fél óra alatt hibásnak talált láncdarabok várható értékét.

(*3 pont*)

Megoldás. *a*) Az első lánctányérra annyi láncszem fér, ahány fog található rajta, tehát 46. Így a lánctányérra tekert lánc hossza $46 \cdot 1{,}27 = 58{,}42$ cm.

b) A lánc az *ábrának* megfelelően két kör közös külső érintőszakaszaiból és két körívből áll. Az első kör kerülete az előbbiek alapján 58,42 cm, így a kör sugara: $r_1 = 9{,}298$ cm. A hátsó fogaskeréken 18 fog van, így a kerülete: $18 \cdot 1{,}27 = 22{,}86$. A kör sugara: $r_2 = 3{,}638$ cm.



Az ábra jelöléseit használva: K_2T párhuzamos E_3E_1-gyel. Ekkor $K_1T = r_1 - r_2 = 5{,}66$. Az érintő merőleges az érintési pontba húzott sugárra, tehát a K_2K_1T háromszög derékszögű. Felírva Pitagorasz tételét:

$$E_3E_1 = K_2T = \sqrt{K_2K_1^2 - (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{41^2 - 5{,}66^2} = 40{,}61 \text{ cm.}$$

Ugyanebben a háromszögben: $\cos\varphi = \dfrac{5{,}66}{41} \approx 0{,}138$, ebből $\varphi = 82{,}065^\circ$. Az első lánctányéron lévő ív hossza:

$$i_1 = \frac{360^\circ - 2\varphi}{180^\circ} \cdot r_1 \cdot \pi \approx 31{,}786 \text{ cm.}$$

A hátsó fogaskeréken lévő ív hossza:

$$i_2 = \frac{2\varphi}{180^\circ} \cdot r_2 \cdot \pi \approx 10{,}421 \text{ cm.}$$

Tehát a lánc hossza: 123,43 cm.

c) A hibás láncdarabok binomiális eloszlású valószínűségi változót alkotnak, melynek paraméterei $n = 5000$ és $p = 0{,}02$. Így a várható érték: $n \cdot p = 5000 \cdot 0{,}02 = 100$.

7. *Ábel elkésett a matematika óráról. Amikor tanára kérdőre vonta, a következőképpen mentegetőzött: „Tanár úr! Fáj a lábam, ezért nem tudtam lépcsőn feljönni a harmadik emeletre. Lifttel kellett jönnöm, de a liftre ki van írva, hogy* 13 *fő használhatja, és sokáig tartott, amíg összejött a* 13 *ember.” (Ezzel persze kitűnő lehetőséget biztosított matematika tanárának, hogy elmagyarázza a „legfeljebb” és „legalább” szavak matematikai lényegét …)*

Az E5vös Napokon az Igazgató Úr úgy döntött, hogy a tizenkettedikesek szabadon használhatják a liftet. A végzősök úgy gondolták, hogy ezt a lehetőséget maximálisan kihasználják, ezért minden esetben 13*-an szálltak be az üres liftbe.*

a) *Bizonyítsuk be, hogy minden ilyen alkalommal biztosan utazott a liftben legalább három olyan diák, akik osztálytársak voltak. (Az iskolában hat végzős osztály van.)*

(*3 pont*)

Az E5vös Napokon a Ki Mit Tud?-ra 12 *fős diákzsűri is alakult, amelyet a végzős évfolyamból véletlenszerűen választottak ki.*

b) *Mekkora a valószínűsége annak, hogy minden osztályt pontosan két fő képviselt, ha az osztálylétszámok:* 12.*A:* 32 *fő,* 12.*B:* 33 *fő,* 12.*C:* 31 *fő,* 12.*D:* 30 *fő,* 12.*E:* 29 *fő,* 12.*F:* 28 *fő?*

(*6 pont*)

A streetball döntője után a hat résztvevő kezet fogott egymással. Mivel a meccs kissé elfajult, ezért voltak, akik nem fogtak kezet. Flóra megkérdezte a résztvevőket, hogy hány emberrel fogtak kezet, és a következő válaszokat kapta: 5; 4; 3; 3; 2; 2. *Flóra ezek után a következőt mondta: „Biztos, hogy van közöttetek legalább egy ember, aki nem tud számolni.”*

c) *Mire alapozta állítását?*

(3 pont)

Az E5vös Napok végén Főző úr, a technikus visszapakolta a kiadott eszközöket kis kuckójába. Lelkes segítői is akadtak, akik a kuckó elé odapakoltak két létrát, három fekete dobozt, négy projektort és öt vetítővásznat, meglehetősen nagy összevisszaságban. Főző úr, ezeket véletlenszerű sorrendben, egyesével bepakolta a helyére.

d) Hányféle módon történhetett ez, ha az azonos típusú eszközöket nem lehet megkülönböztetni egymástól?

(4 pont)

Megoldás. *a*) Alkalmazzuk a skatulya elvet, legyenek az osztályok a skatulyák. A liftben $6 \cdot 2 + 1$ diák utazott. Így a skatulya elv általános alakja alapján van legalább egy olyan osztály, amelyből legalább három diák utazott a liftben.

b) A végzős évfolyamon összesen 183 diák van. Közülük választunk ki 12 diákot, így az összes esetek száma: $\binom{183}{12}$.

Az egyes osztályokból 2-2 főt rendre $\binom{32}{2}$, $\binom{33}{2}$, $\binom{31}{2}$, $\binom{30}{2}$, $\binom{29}{2}$, $\binom{28}{2}$ módon választhatjuk ki. Mivel ezeket egymástól függetlenül választhatjuk, ezért a kedvező esetek száma:

$$\binom{32}{2} \cdot \binom{33}{2} \cdot \binom{31}{2} \cdot \binom{30}{2} \cdot \binom{29}{2} \cdot \binom{28}{2}.$$

A keresett valószínűség:

$$\frac{\binom{32}{2} \cdot \binom{33}{2} \cdot \binom{31}{2} \cdot \binom{30}{2} \cdot \binom{29}{2} \cdot \binom{28}{2}}{\binom{183}{12}} = 0{,}00399 \approx 0{,}004.$$

c) Tekintsük a résztvevőket egy hatpontú egyszerű gráf csúcsainak. Két csúcs akkor van összekötve, ha a résztvevők kezet fogtak. Az egyes csúcsok fokszámainak összege: $5 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 = 19$. Mivel a csúcsok fokszámainak összege az élek számának kétszerese, így ez nem lehet páratlan szám.

d) A sorrendek száma az ismétléses permutáció segítségével számolható ki:

$$P_{14}^{\{2;3;4;5\}} = \frac{14!}{2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5!} = 2\,522\,520.$$

Tehát 2 522 520-féle sorrendben pakolhatta be a dolgokat.

8. *Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi ponthalmazokat:*

a) $A := \{P(x;y) \mid 9x^2 - 16y^2 \geq 0\}$.

(5 pont)

b) $B := \{Q(x;y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$.

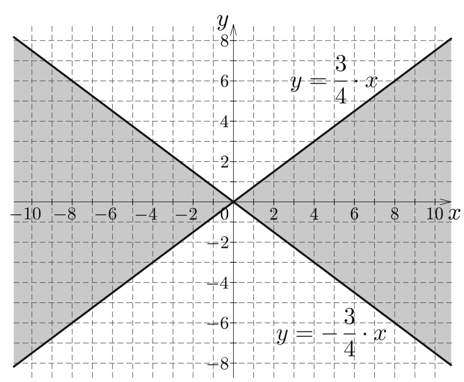
(3 pont)

c) Mekkora az $A \cap B$ *halmaz területe?*

(8 pont)

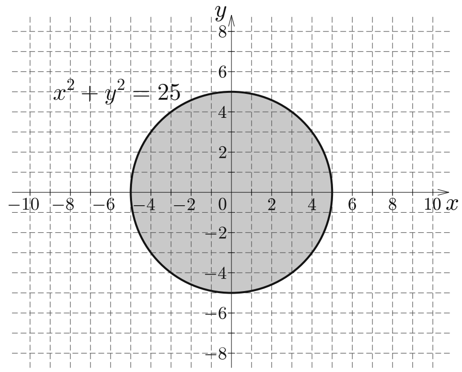
Megoldás. *a*) $$9x^2 - 16y^2 = (3x - 4y) \cdot (3x + 4y) \geq 0,$$

$3x - 4y \leq 0$ és $3x + 4y \leq 0$, vagy $3x - 4y \geq 0$ és $3x + 4y \geq 0$ (*4. ábra*).



4. ábra

b) A keresett pontok az origó középpontú, 5 egység sugarú kör belseje és a körvonal (*5. ábra*).



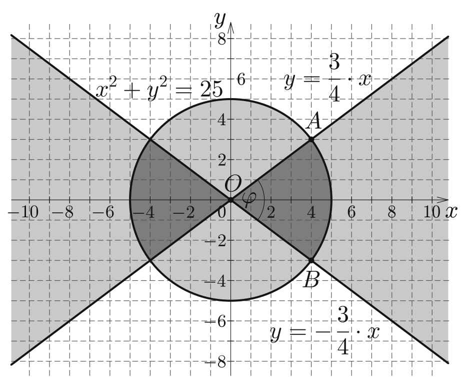
5. ábra

c) A metszet két körcikk, amelyeket az egyenesek és az 5 egység sugarú kör határolnak (*6. ábra*). A körcikkekhez tartozó φ középponti szögre:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{3}{4}, \quad \text{ebből} \quad = 73{,}74^\circ.$$

A metszet területe a két egybevágó körcikk területének összege:

$$T = 2 \cdot \frac{73{,}74^\circ}{360^\circ} \cdot 5^2\pi = 32{,}18.$$



6. ábra

A terület határozott integrál segítségével is kiszámítható. Az egyik körcikk felének területe:

$$\frac{T}{2} = \left| \int_0^4 \frac{3}{4}x\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int_4^5 \sqrt{25 - x^2}\mathrm{d}x \right|,$$

$$\int_0^4 \frac{3}{4}x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{8}x^2\right]_0^4 = 6,$$

$$\int_4^5 \sqrt{25 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\arcsin\frac{4}{5}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{25 - 25\sin^2 t} \cdot 5\cos t\,\mathrm{d}t = \int_{\arcsin\frac{4}{5}}^{\frac{\pi}{2}} 25\cos^2 t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{25}{2} \cdot \int_{\arcsin\frac{4}{5}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2t + 1)\,\mathrm{d}t = \frac{25}{2} \cdot \left[\frac{1}{2}\sin 2t + t\right]_{\arcsin\frac{4}{5}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{25}{2}\left(\left(0 + \frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{12}{25} + \arcsin\frac{4}{5}\right)\right) = \frac{25}{4}\pi - 6 - \frac{25}{2}\arcsin\frac{4}{5}.$$

Tehát a keresett terület:

$$2T = 4 \cdot \left(6 + \frac{25}{4}\pi - 6 - \frac{25}{2}\arcsin\frac{4}{5}\right) = 25\pi - 50 \cdot \arcsin\frac{4}{5} = 32{,}18.$$

9. *Egy piramisjáték elindítója az első héten öt embert szervezett be. A szervezés jól folytatódott, ezért a második héttől kezdődően a hetente beszervezettek száma a következő sorozat szerint alakult:*

$$a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 8.$$

a) *Összesen hányan vettek már részt az ötödik héten a játékban?*

(3 pont)

b) Igazoljuk, hogy a sorozat utolsó számjegyei periodikusan ismétlődő sorozatot alkotnak.

(5 pont)

c) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat n-edik eleme a másodiktól kezdve: $a_n = 3^{n-1} + 4$.

(8 pont)

Megoldás. *a)*

$a_1 = 5$,

$a_2 = 3 \cdot 5 - 8 = 7$,

$a_3 = 3 \cdot 7 - 8 = 13$,

$a_4 = 3 \cdot 13 - 8 = 31$,

$a_5 = 3 \cdot 31 - 8 = 85$.

Tehát az ötödik héten $5 + 7 + 13 + 31 + 85 = 141$ fő vett részt a játékban.

b) 1. megoldás. A sorozat elemeinek utolsó számjegyei az elemek 10-zel való osztási maradékai. Az osztási maradékokkal ugyanazt a műveletet kell végrehajtani, mint az eredeti számokkal.

Az osztási maradékokból képzett (b_n) sorozat elemei rendre:

	$b_1 = 5$,
$3 \cdot 5 - 8 = 7$, ennek 10-zel való osztási maradéka:	$b_2 = 7$,
$3 \cdot 7 - 8 = 13$, ennek 10-zel való osztási maradéka:	$b_3 = 3$,
$3 \cdot 3 - 8 = 1$, ennek 10-zel való osztási maradéka:	$b_4 = 1$,
$3 \cdot 1 - 8 = -5$, ennek 10-zel való osztási maradéka:	$b_5 = 5$.

És ettől kezdve minden ismétlődik, hiszen ugyanazokkal a számokkal végezzük ugyanazokat a műveleteket.

2. megoldás. Használjuk fel a feladat *c)* részében megadott $a_n = 3^{n-1}+4$ képletet. Vizsgáljuk a három hatványainak 10-zel való osztási maradékait, ezekkel ugyanazokat a műveleteket kell végrehajtani, mint az eredeti számokkal:

$3^0 = 1$, ennek 10-zel való osztási maradéka:	1,
$3^1 = 3 \cdot 3^0$, ennek 10-zel való osztási maradéka:	$3 \cdot 1 = 3$,
$3^2 = 3 \cdot 3^1$, ennek 10-zel való osztási maradéka:	$3 \cdot 3 = 9$,
$3^3 = 3 \cdot 3^2$, ennek 10-zel való osztási maradéka:	$3 \cdot 9 = 27$, azaz 7,
$3^4 = 3 \cdot 3^3$, ennek 10-zel való osztási maradéka:	$3 \cdot 7 = 21$, azaz 1.

Ettől kezdve az osztási maradékokban ismétlődik az $1; 3; 9; 7$ sorozat. Ekkor az eredeti sorozat utolsó számjegyei az $5; 7; 3; 1$ ismétlődő sorozatot alkotják.

c) 1. megoldás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük: $a_1 = 5 = 3^0 + 4$, az állítás igaz.

Tegyük fel, hogy $n = k$-ra igaz, hogy $a_k = 3^{k-1} + 4$. Állítás: $n = k + 1$-ra igaz, hogy $a_{k+1} = 3^k + 4$.

Bizonyítás: A rekurziós megadással: $a_{k+1} = 3 \cdot a_k - 8$. Az indukciós feltételt felhasználva: $a_{k+1} = 3 \cdot (3^{k-1} + 4) - 8 = 3^k + 4$.

Beláttuk, hogy ha az állítás igaz a k természetes számra, akkor a $k + 1$ természetes számra is igaz. Mivel az állítás igaz az $n = 1$-re, ezért minden természetes számra igaz.

2. megoldás. Írjuk fel a sorozat elemeit az első elem és a rekurziós képlet segítségével:

$$\begin{aligned}
&a_1 = 5 = 3^0 + 4,\\
&a_2 = 3 \cdot 5 - 8,\\
&a_3 = 3 \cdot (3 \cdot 5 - 8) - 8 = 3^2 \cdot 5 - 3 \cdot 8 - 8 = 3^2 \cdot 5 - (3 + 1) \cdot 8,\\
&a_4 = 3 \cdot (3^2 \cdot 5 - 3 \cdot 8 - 8) - 8 = 3^3 \cdot 5 - 3^2 \cdot 8 - 3 \cdot 8 - 8 = 3^3 \cdot 5 - (3^2 + 3 + 1) \cdot 8.
\end{aligned}$$

Ezek alapján: $a_n = 3^{n-1} \cdot 5 - (3^{n-2} + 3^{n-3} + \ldots + 1) \cdot 8$. A mértani sorozat összegképletével:

$$a_n = 3^{n-1} \cdot 5 - \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} \cdot 8 = 3^{n-1} \cdot 5 - 4 \cdot 3^{n-1} + 4 = 3^{n-1} + 4.$$

Balga Attila, Székely Péter
Budapest, V. kerületi Eötvös József Gimnázium