

## I. rész

1. Melyek azok az  $x, y$  egész számok, amelyekre egyszerre teljesül, hogy:

- a)  $x^2 + y^2 \leq 25$ ;
- b)  $|x| + |y| \geq 5$ ;
- c)  $\log_2(y + 1 - x^2) \geq 0$ ?

(12 pont)

2. a) Az egyszerű hétpontú gráf csúcsainak foka rendre 3, 2, 4, 1, 2; a másik kettőt nem ismerjük. Állapítsuk meg ezeket, ha a gráfnak 11 éle van, valamint a gráf megrajzolható egy folytonos vonallal úgy, hogy mindegyik élén pontosan egyszer haladtunk át.

b) Adjunk meg három különböző irracionális számot úgy, hogy a három szám összege és bármelyik kettő szorzata is racionális szám legyen.

c) Mutassuk meg, hogy az  $A$  és  $B$  kijelentések tetszőleges logikai értékére igaz a  $\neg(A \rightarrow B) = A \wedge \neg B$  egyenlőség.  
(12 pont)

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$\sin x + \cos x = \frac{1 - \sin(2x)}{\cos(2x)}$$

egyenletet.

(13 pont)

4. Két horgászegyesület, az Aligai Pecások és a Bélatelepi Horgászok közös edzőtáborozást tartottak 47 fő részvételével. A csapatokban felnőtt és junior korosztályú csoportok voltak. Tudjuk, hogy:

- a) minden csoport létszáma prímszám;
- b) legkevesebben a junior Bélatelepi Horgászok, legtöbben a felnőtt Aligai Pecások vannak a táborban;
- c) a felnőtt versenyzők összlétszáma osztható tízzel;
- d) a két csapat felnőtt tagjainak létszáma között 10-nél kisebb a különbség.  
Hányan vannak az egyes csoportokban?

(14 pont)

## II. rész

5. Egy húrnégyszög egyúttal érintőnégyyszög is (bicentrikus négyszög). Két szomszédos oldala 9, 10 egység, az általuk bezárt szög  $60^\circ$ . Jelöljük  $O$ -val a körülírt,  $K$ -val a beírt kör középpontját.

- a) Adjuk meg a másik két oldal hosszát.
- b) Határozzuk meg a beírt- és a körülírt kör sugarát.
- c) Milyen hosszú a  $KO$  távolság?

(16 pont)

- 6. a) Vizsgáljuk meg az  $a_n = n^3 - n^2$  sorozatot monotonitás és korlátosság szempontjából. Állításainkat igazoljuk.
- b) Mutassuk meg, hogy a sorozat első  $n$  tagjának összege

$$\frac{n(n+1)(n-1)(3n+2)}{12}.$$

(16 pont)

7. Anna és Bálint szabályos dobókockával játszik. Felváltva dobna, ha a dobott szám prímszám, akkor a szám egyenesen álló bábuval egyet jobbra, ha összetett szám, akkor egyet balra lépnek. Ha egyik sem, akkor a bábu helyben marad. A bábu kezdetben a nullán áll, összesen hatszor fognak dobni. Előtte fogadnak arra, hogy a játék végén melyik számon áll majd a bábu. Anna az egyesre, Bálint a kettesre fogad.

- a) Kinek mekkora esélye van a nyereségre?  
Tegyük fel, hogy Anna nyerte a fogadást.
- b) Mennyi a valószínűsége, hogy a játék során egyszer dobtak egyest?

(16 pont)

8. A 2 egység élű kocka egyik csúcsát jelöljük  $A$ -val, majd állítsunk egyenlő hosszú szakaszokat a kocka  $A$ -val érintkező lapjainak középpontjába, az adott lapokra merőlegesen kifelé.

A szakaszok lapra nem illeszkedő végpontjait jelöljük  $P, Q, R$ -rel.

- a) Milyen hosszúak a szakaszok, ha az  $A, P, Q, R$  pontok egy síkban vannak?

A 2 egység élű kocka lapjaira kifelé egyenlő magasságú, 2 egység oldalú négyzet alapú egyenes gúlákat helyezünk úgy, hogy a gúla alapja egybeesik a kocka adott lapjával.

- b) Mekkora a gúla magassága, ha az így kapott testnek van körülírt és beírt gömbje?
- c) Mekkora a gúla magassága abban az esetben, ha az így keletkezett poliédernek 14 csúcsa, 12 lapja és 24 éle lett?

(16 pont)

**9.** Legyen  $f(x) = 2x^2 - x^3$ ;  $x \in [0; 2]$ . Az  $f(x)$  függvény grafikonjához illesztettünk jobbról egy  $y$  tengellyel párhuzamos tengelyű parabolát, amelyre az alábbiak egyszerre teljesülnek:

- a) a két görbe törésmentesen csatlakozik egymáshoz a 2 abszcisszájú pontban;
- b) a parabola és az  $x$  tengely által közrefogott síkidom területe egyenlő az  $f(x)$  grafikonja és az  $x$  tengely által bezárt síkidom területével.

Adjuk meg a parabola egyenletét.

*(16 pont)*