I. rész

1. *a*) Adott két függvény:

$$f(x) = \frac{2x+9}{3}; \qquad g(x) = \sqrt{x^2+4x+4}\,.$$

Van-e olyan $x \in \mathbb{R}$, ahol a két függvény helyettesítési értéke megegyezik?

(*6 pont*)

b) Van-e olyan p valós szám, amelyre az alábbi két kifejezés értéke egyenlő:

$$A = \log_2(p+2) + \log_2(p-2); \qquad B = 1 + \log_2(p+10)?$$

(*6 pont*)

2. Solymász tanár úr biológia órájára 26 végzős jár, és valamennyien részt vesznek imádott biológia tanáruk humánetológia óráján is. Félévkor a tanár úr (nevelő célzattal) meglehetősen szigorú volt, ezért 21-en nem kaptak ötöst biológiából és 19-en nem kaptak ötöst humánetológiából. Ugyanakkor 8-an kaptak ötöst legalább az egyik tárgyból.

a) Hány végzős kapott ötöst mindkét tárgyból?

(*4 pont*)

A biológia próbaérettségit mind a 26 diák megírta. A tanár úr korábbi szigorúsága elérte célját, mert a próbaérettségi már sokkal jobban sikerült. Senki sem kapott elégtelen, vagy elégséges osztályzatot. A közepes, jó és jeles osztályzatok száma ebben a sorrendben egy mértani sorozat három egymást követő eleme lett. A csoport átlaga $\frac{60}{13}$ lett.

b) Számoljuk ki a próbaérettségi osztályzatainak szórását. Az eredményt két tizedesjegy pontossággal adjuk meg.

(*8 pont*)

3. *a*) Határozzuk meg az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 2$ függvény lokális maximumhelyét.

(*5 pont*)

b) Mekkora területet zár be a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x^2 - 6x - 24$ függvény grafikonja és az x tengely?

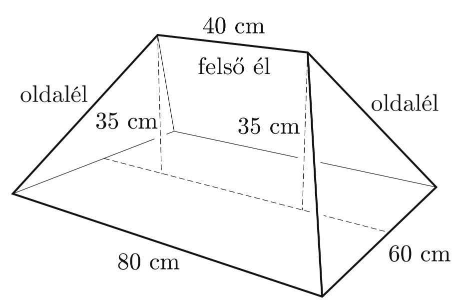
(*6 pont*)

c) Mennyi az $a_n = \dfrac{11n-5}{3n+8}$ sorozat határértéke?

(*3 pont*)

4.

Peti bá' egy téglalap alapú babaházat készített a lányainak. A téglalap oldalai 60 cm és 80 cm. A babaházra egy levehető „sátortetőt” készített. A tető felső éle 40 cm hosszú, és a babaház téglalap alakú mennyezetének hosszabbik középvonala felett, attól 35 cm távolságra van. A tető oldalélei egyenlő hosszúak.



a) Számítsuk ki az oldalélek hosszát és a vízszintes síkkal bezárt szögüket.

(*7 pont*)

Zsófi a tető, trapéz alakú részére egy téglalap alakú díszt szeretne felragasztani. A téglalap egyik oldala illeszkedik a trapéz alapvonalára, két csúcsa pedig a trapéz száraira.

b) Mekkora a legnagyobb területű téglalap alapra illeszkedő éle, amelyet a megadott módon el lehet helyezni a tetőn? A választ négyzetcentiméterben, egész számra kerekítve adjuk meg.

(*6 pont*)

II. rész

5. A DÖ 900 pólót rendelt E5vös Napra. A pólókat két géppel nyomtatták. A gépeket kezdetben rosszul állították be, ezért az első gép (Horribile dictu!) a rajta nyomtatott 400 póló 2%-ára tévesen, az E5vös helyett az Eötvös feliratot nyomtatta, és a másik gép ugyanezt a hibát követte el a rajta nyomtatott pólók 3,4%-ával. A minőségellenőrzéskor Bocó a 900 alaposan összekevert pólóból véletlenszerűen kiválasztott egyet, és azon hibás volt a felirat. (Ezen persze kellőképpen elkeseredett …)

a) Mekkora annak a valószínűsége, hogy a hibás pólót a második gépen nyomtatták?

(*5 pont*)

A DÖ úgy döntött, hogy a hibásan nyomtatott póló árából először 500 Ft árengedményt ad, de a kereslet nagyon minimális volt, ezért az új árat még tovább kellett csökkenteni, annak p%-ával. Így a póló 50 Ft-tal drágább lett, mintha először engedték volna le az árát p%-kal és utána 500 Ft-tal, viszont 90 Ft-tal olcsóbb lett, mint ha mindkétszer az aktuális ár p%-ával csökkentették volna az árát.

b) Mennyi volt a póló eredeti ára, és hány százalékos volt a csökkentés?

(*11 pont*)

6. Fixi kerékpárunkon az első lánctányéron 46 fog található, a hátsó fogaskeréken pedig 18 fog van. (Az első lánctányérhoz rögzítik a pedált, a hátsó fogaskerék pedig a hátsó keréken van.)

1. ábra

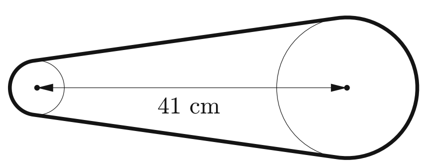
Az *1. ábrán* a lánc felülnézeti képe látható, a második ábrán pedig az, hogy miként illeszkedik a lánc a fogaskerékre. Két láncszem tengelye 1,27 cm távolságra van egymástól (lásd *2. ábra*).

2. ábra

a) Milyen hosszú lánc férne az első lánctányérra, ha teljesen körbetekernénk lánccal?

(*3 pont*)

A két fogaskerék (a pedál és a hátsó tengely) középpontja 41 cm van egymástól (*3. ábra*) és a lánc teljesen feszes.



3. ábra

b) Milyen hosszú lánc van a kerékpáron? (Válaszunkat centiméterben, két tizedesjegy pontossággal adjuk meg.)

(*10 pont*)

A láncokat gyártó üzemben 160 láncszemből álló láncdarabokat készítenek. A mérések alapján a láncdarabok 2%-ában egy szemmel kevesebb van, mint az előírás. A láncszemek számát egy számítógép ellenőrzi egy futószalagon. A futószalag különböző pontjain véletlenszerűen kiválaszt egy láncdarabot és meghatározza, hány láncszemből áll, de a futószalag folyamatosan mozog, ezért nem lehet kiemelni a hibás láncdarabot. Ennek megfelelően akár az az extrém eset is előfordulhat, hogy ugyanazt a láncdarabot ellenőrzi csak, akár többször is. Egy félórás időintervallumban 5000 láncdarab kering a futószalagon.

c) Határozzuk meg a fél óra alatt hibásnak talált láncdarabok várható értékét.

(*3 pont*)

7. Ábel elkésett a matematika óráról. Amikor tanára kérdőre vonta, a következőképpen mentegetőzött: „Tanár úr! Fáj a lábam, ezért nem tudtam lépcsőn feljönni a harmadik emeletre. Lifttel kellett jönnöm, de a liftre ki van írva, hogy 13 fő használhatja, és sokáig tartott, amíg összejött a 13 ember.” (Ezzel persze kitűnő lehetőséget biztosított matematika tanárának, hogy elmagyarázza a „legfeljebb” és „legalább” szavak matematikai lényegét ...)

Az E5vös Napokon az Igazgató Úr úgy döntött, hogy a tizenkettedikesek szabadon használhatják a liftet. A végzősök úgy gondolták, hogy ezt a lehetőséget maximálisan kihasználják, ezért minden esetben 13-an szálltak be az üres liftbe.

a) Bizonyítsuk be, hogy minden ilyen alkalommal biztosan utazott a liftben legalább három olyan diák, akik osztálytársak voltak. (Az iskolában hat végzős osztály van.)

(*3 pont*)

Az E5vös Napokon a Ki Mit Tud?-ra 12 fős diákzsűri is alakult, amelyet a végzős évfolyamból véletlenszerűen választottak ki.

b) Mekkora a valószínűsége annak, hogy minden osztályt pontosan két fő képviselt, ha az osztálylétszámok: 12.A: 32 fő, 12.B: 33 fő, 12.C: 31 fő, 12.D: 30 fő, 12.E: 29 fő, 12.F: 28 fő?

(*6 pont*)

A streetball döntője után a hat résztvevő kezet fogott egymással. Mivel a meccs kissé elfajult, ezért voltak, akik nem fogtak kezet. Flóra megkérdezte a résztvevőket, hogy hány emberrel fogtak kezet, és a következő válaszokat kapta: 5; 4; 3; 3; 2; 2. Flóra ezek után a következőt mondta: „Biztos, hogy van közöttetek legalább egy ember, aki nem tud számolni.”

c) Mire alapozta állítását?

(*3 pont*)

Az E5vös Napok végén Főző úr, a technikus visszapakolta a kiadott eszközöket kis kuckójába. Lelkes segítői is akadtak, akik a kuckó elé odapakoltak két létrát, három fekete dobozt, négy projektort és öt vetítővásznat, meglehetősen nagy összevisszaságban. Főző úr, ezeket véletlenszerű sorrendben, egyesével bepakolta a helyére.

d) Hányféle módon történhetett ez, ha az azonos típusú eszközöket nem lehet megkülönböztetni egymástól?

(*4 pont*)

8. Ábrázoljuk derékszögű koordináta-rendszerben az alábbi ponthalmazokat:

a) $A := \{P(x;y) \mid 9x^2 - 16y^2 \geq 0\}$.

(*5 pont*)

b) $B := \{Q(x;y) \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$.

(*3 pont*)

c) Mekkora az $A \cap B$ halmaz területe?

(*8 pont*)

9. Egy piramisjáték elindítója az első héten öt embert szervezett be. A szervezés jól folytatódott, ezért a második héttől kezdődően a hetente beszervezettek száma a következő sorozat szerint alakult:

$$a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 8.$$

a) Összesen hányan vettek már részt az ötödik héten a játékban?

(*3 pont*)

b) Igazoljuk, hogy a sorozat utolsó számjegyei periodikusan ismétlődő sorozatot alkotnak.

(*5 pont*)

c) Bizonyítsuk be, hogy a sorozat n-edik eleme a másodiktól kezdve: $a_n = 3^{n-1} + 4$.

(*8 pont*)