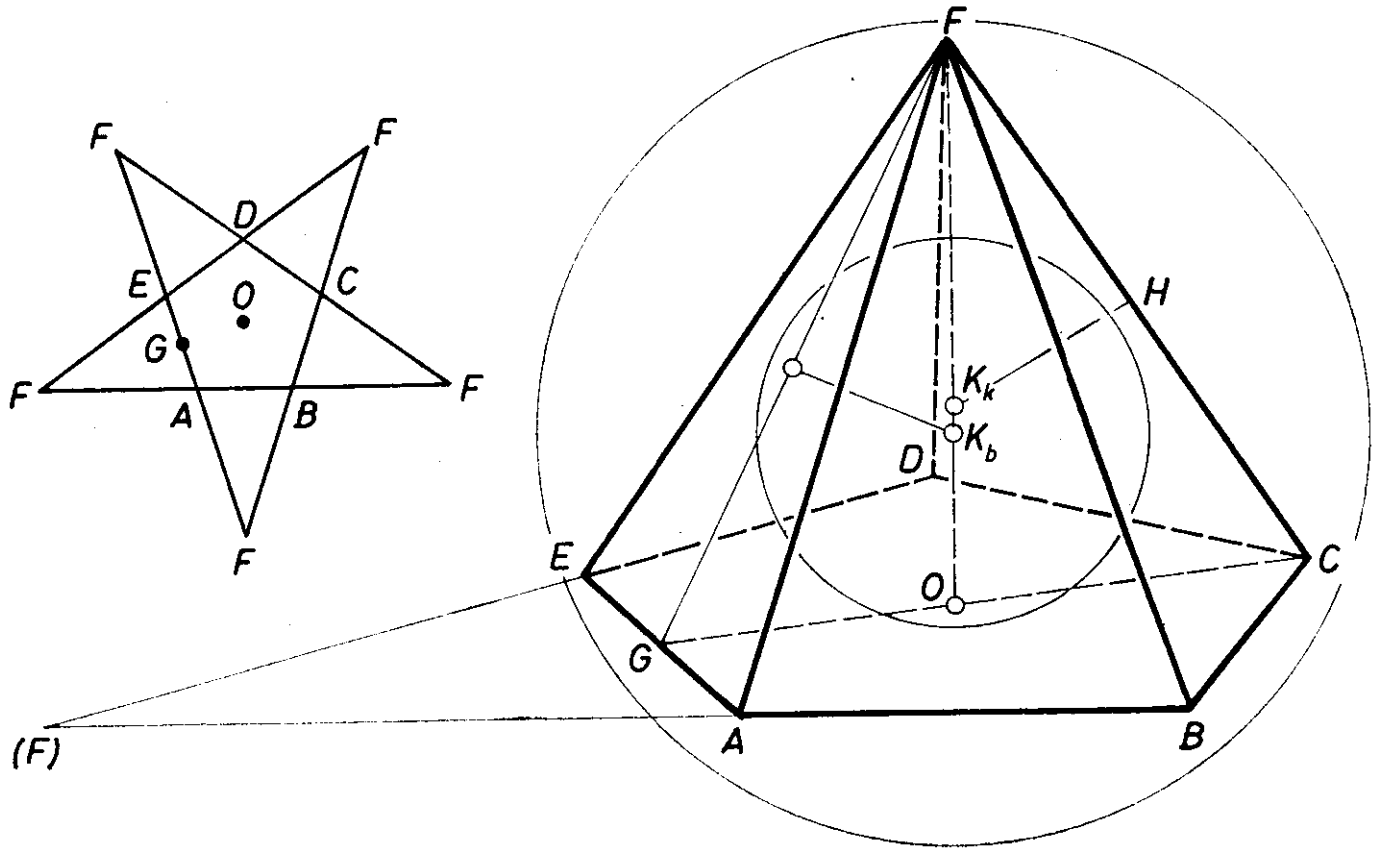


I. megoldás. Jelöljük az alaplap (szabályos ötszög) csúcsait rendre A, B, C, D, E -vel, a gúla hatodik csúcsát F fel. Mivel az oldallapok leforgatásával szabályos csillagötszög keletkezik, azért F -nek az AE él körüli leforgatott helyzete az AB és ED oldalégyenesek metszéspontjába esik (1. ábra).



1. ábra

E szerint az oldallapok olyan egyenlő szárú háromszögek, amelyekben az alapon levő szög 72° , és az oldalélek hossza

$$AF = \frac{AE/2}{\cos \angle FAE} = \frac{1}{2 \cos 72^\circ} = \frac{1}{2 \sin 18^\circ} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} (= 1,618 \text{ egység}).$$

Jelöljük az alaplap középpontját O -val – ez a magasság talppontja –, az AE él felezőpontját G -vel. A gúla előírt szabályosságából következik, hogy mindkét gömb középpontja az FO magasságvonalon (forgási szimmetriatengelyen) lesz, továbbá a beírt gömb az alaplapot O -ban érinti, az AEF lapot pedig a GF oldalmagasság egy pontjában.

Legyen még a beírt gömb középpontja K_b , és sugara ϱ , így KG_b felezi az $\angle FGO = \gamma$ szöveget, és

$$\varrho = OK_b = GO \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = GO \sqrt{\frac{1 - \cos \gamma}{1 + \cos \gamma}}.$$

Itt ismert goniometriai összefüggések alapján, valamint felhasználva 18° -nak és többszöröseinek a szabályos ötszögből kiszámítható szögfüggvényeit, egyszerűen

$$GO = AG \operatorname{tg} 54^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}},$$

másképp $\cos \gamma = GO/GF$, így a gyökjel alatti kifejezés:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos \gamma}{1 + \cos \gamma} &= \frac{GF - GO}{GF + GO} = \frac{GA(\operatorname{tg} 72^\circ - \operatorname{tg} 54^\circ)}{GA(\operatorname{tg} 72^\circ + \operatorname{tg} 54^\circ)} = \frac{\sin 18^\circ}{\sin 3 \cdot 18^\circ} = \frac{1}{3 - 4 \sin^2 18^\circ} \\ &= \frac{2}{3 + \sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Ezekkel

$$\varrho = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{40}} (= 0,4253 \text{ egység}).$$

A körülírt gömb R sugarának számításához a COF háromszöget használjuk. Jelöljük a gömb középpontját K_k -val, FC felezőpontját H -val. Az FK_kH és FCO derékszögű háromszögek hasonlóságából

$$\frac{FH}{R} = \frac{FO}{FC}, \quad R = \frac{FC^2}{2 \cdot FO} = \frac{FC^2}{2\sqrt{FC^2 - OC^2}}.$$

Itt

$$OC = OA = \frac{AG}{\cos 54^\circ} = \frac{1}{2 \sin 36^\circ} = \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}.$$

A nevezőbeli négyzetgyökjel alatt

$$FC^2 - OC^2 = \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^2 - \frac{5 + \sqrt{5}}{10} = \frac{1}{5 - 2\sqrt{5}}$$

áll, végeredményben tehát

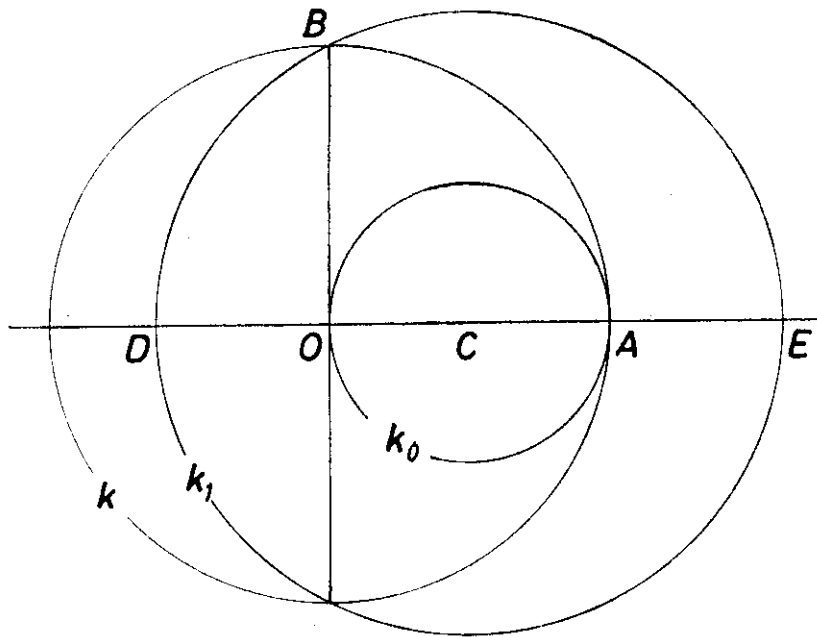
$$R = \frac{1}{4} \sqrt{10 + 2\sqrt{5}} \quad (= 0,9511 \text{ egység}).$$

Megjegyzés. Két észrevételt teszünk számításaink alapján. Egyrészt $R/\varrho = \sqrt{5}$, másrészt

$$FO = \frac{FC^2}{2R} = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{5}}} = R + \varrho,$$

tehát K_b és K_k egybeesik.

II. megoldás (vázlat). Induljunk ki a szabályos ötszög eukleidészi szerkesztéséből (2. ábra).



2. ábra

Legyenek OA és OB a k kör merőleges sugarai, C az OA szakasz felezőpontja, és jelöljük a C középpontú, A -n, illetve B -n átmenő köröket k_0 -lal, illetve k_1 -gyel, k_1 -nek az OA egyenesen levő pontjait D -vel, E -vel (D legyen közülük O -hoz közelebb). Az EBD derékszögű háromszögben BO a DO , $OE = OA + AE = OB + DO$ szakaszok mértani közepe, emiatt

$$DO : OB = OB : (OB + DO),$$

vagyis DO és OB aránya megegyezik a szabályos tízszög oldalainak és a köré írt kör sugarának az arányával. Így DO valóban a k -ba írt szabályos tízszög oldala, és

$$BE^2 = DE \cdot OE$$

miatt BE a k -ba írt szabályos ötszög átlója, végül $DB : BE = DO : OB$ miatt DB a k -ba írt szabályos ötszög oldala.

Forgassuk meg ezt az ábrát a DE egyenes körül, és jelöljük a k_0 , k_1 körök forgatásából keletkező gömböket G_0 lal, G_1 -gyel. G_1 -ből a BO forgatásából származó sík k -val egybevágó kört metsz ki, tehát az ebbe írt szabályos ötszög

oldalai BD -vel egyenlőek, átlói pedig BE -vel. így ez az ötszög E -vel együtt épp a feladatban szereplő gúlát határozza meg, ha BD egységnyi.

A kapott gúlának G_1 természetesen a köré írt gömbje, megmutatjuk, hogy G_0 a beírt gömb. A konstrukció miatt G_0 érinti az alaplapot, melyben például a B csúcsból induló átlók az oldallapokkal egybevágó háromszögeket zárnak közre. Mivel $BC = EC$, a G_0 -hoz E -ből húzott érintősíkok is k -val egybevágó köröket metszenek ki G_1 -ből, tehát a gúla oldallapjai valóban érintik G_0 -t.

Ha $OC = \varrho$, akkor $BC = \varrho\sqrt{5}$, $DO = \varrho(\sqrt{5} - 1)$, $DB^2 = \varrho^2(10 - 2\sqrt{5})$. Ha tehát $DB = 1$, akkor

$$\varrho^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{5 - \sqrt{5}} = \frac{5 + \sqrt{5}}{40}.$$

Így a gúlába írt gömb sugara $\varrho = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{40}}$ és a gúla köré írt gömb sugara $BC = \varrho\sqrt{5} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$.