Anharmonikus rezgések periódusideje

Ha egy egyensúlyi helyzetéből kimozdított testet visszahúzó erő a Hooke-törvényt követi, azaz a kitéréssel arányos, a test harmonikus rezgőmozgást végez. Ennek egyik fontos jellegzetessége, hogy a rezgés ideje nem függ a kitérítés nagyságától. A valóságban azonban az erőtörvény mindig csak bizonyos határok között, valamilyen közelítésben tekinthető lineárisnak. Bizonyos esetekben ezek a határok lehetnek egészen tágak (pl. a direkt erre a célra készített rugalmas eszközök esetén), máskor el kell fogadnunk, hogy a vizsgált periodikus mozgás csak nagyon kicsiny amplitúdó esetén tekinthető harmonikusnak (ilyen pl. az inga mozgása, és általában az összetett rendszerek egyensúly körüli rezgései). Úgy is mondhatjuk, hogy ezekben az esetekben a harmonikus közelítés csak az első közelítés, ami tovább finomítható. Az anharmonikus rezgések periódusideje már nem független az amplitúdótól, de az első korrekció meglepően könnyen kiszámítható. A továbbiakban ezt fogjuk bemutatni egy egyszerű, ámde könnyen általánosítható példán.

Először elevenítsünk fel néhány dolgot, amit a harmonikus rezgésekről tudunk! Ha egy test mozgását az

$$ma = -Dx \tag{1}$$

mozgásegyenlet írja le (amelyben m a test tömege, a a gyorsulása, x egy adott ponthoz viszonyított kitérése és D egy pozitív állandó), akkor ez a test harmonikus rezgőmozgást végez. Erre jellemző, hogy a kitérést, a mozgás sebességét és a gyorsulást rendre az

$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{2}$$

$$v = A\omega_0\cos(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{3}$$

és az

$$a = -A\omega_0^2\sin(\omega_0 t + \varphi_0) \tag{4}$$

függvények adják meg. Ezekben A a rezgés amplitúdója, az ω_0 körfrekvencia $\omega_0 = \sqrt{D/m}$, a φ_0 szöget pedig a test $t = 0$ időpontban elfoglalt helyzete határozza meg. A rezgés periódusideje $T_0 = 2\pi/\omega_0$. A későbbiekben fontos összefüggés lesz az energiamegmaradás törvénye, ezért érdemes felidéznünk, hogy ha egy testet $F(x) = -Dx$ erő húz vissza, akkor ezen erővel szemben $V(x) = Dx^2/2$ munkát kell végeznünk, hogy a testet az origóból az x pozícióba vigyük. (Ezt úgy szoktuk mondani, hogy az $F(x)$-nek a $V(x)$ a potenciálja. Azzal, hogy ez mit is jelent pontosan, a Függelékben még foglalkozunk.) Ennek segítségével az energia mérlegegyenlete:

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(x) = \frac{1}{2}DA^2. \tag{5}$$

Következő lépésként egy anharmonikus esetet próbálunk leírni. Bár nem minden egyensúlyi helyzet szimmetrikus (vagyis $F(-x) = -F(x)$ tulajdonságú erőtörvénynek megfelelő), mi most csak ilyet vizsgálunk, ezek közül is a legegyszerűbbet vesszük. Ebben a kitérített testet visszahúzó erőt egy harmadfokú kifejezés adja meg, tehát a mozgásegyenlet

$$ma = F^*(x) = -Dx - D^*x^3. \tag{6}$$

Itt D^* előjele nincs megkötve, és feltételezzük, hogy az anharmonikus D^*x^3 tag az egész mozgás során kicsiny az előtte állóhoz viszonyítva, azaz $\frac{|D^*|}{D}A^2 \ll 1$. A továbbiakban azt vizsgáljuk meg, milyen mértékben változtatja meg ez a tag a rezgésidőt. Először két egyszerű, a harmonikushoz hasonló közelítéssel próbálkozunk.

1) A harmonikus rezgés esetén $a_{\max} = A\omega^2$. Ennek analógiájára a (6) egyenletből az

$$\omega_1 = \omega_0\sqrt{1 + bA^2} \tag{7}$$

érték adódik, ahol $b = D^*/D$.

2) A harmonikus rezgés során $v_{\max} = A\omega$. Kiindulhatunk ebből az összefüggésből is! Ahogy azt a Függelékben bemutatjuk, a (6) egyenletben szereplő $F^*(x)$ erőhöz tartozó potenciál

$$V^*(x) = \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{4}D^*x^4,$$

tehát az energiamegmaradás egyenlete most

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Dx^2 + \frac{1}{4}D^*x^4 = \frac{1}{2}DA^2 + \frac{1}{4}D^*A^4. \tag{8}$$

A $v_{\max}$ sebességet ebből számolva az

$$\omega_2 = \omega_0\sqrt{1 + \frac{bA^2}{2}} \tag{9}$$

kifejezés adódik. Tanulságos megnéznünk azokat a *harmonikus* potenciálokat, amelyekben az m tömegű próbatestünk ω_1, illetve ω_2 körfrekvenciával rezegne. Ezek rendre

$$V_1(x) = \frac{1}{2}D\big(1 + bA^2\big)x^2 - \frac{1}{4}D^* A^4$$

és

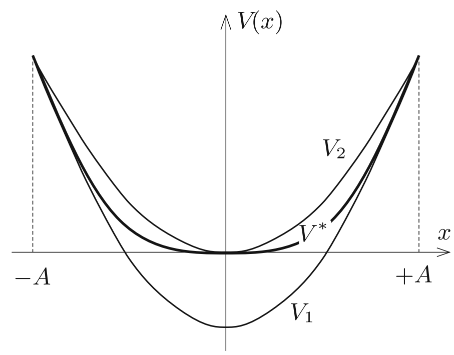
$$V_2(x) = \frac{1}{2}D\left(1 + \frac{bA^2}{2}\right)x^2.$$

A potenciálokhoz tetszőleges konstansokat hozzá lehet adni, ezek az energiamérlegből úgyis kiesnek. Mi most úgy választottuk meg a potenciális energiák nullpontját, hogy

$$V_1(\pm A) = V^*(\pm A) = V_2(\pm A) \tag{10}$$

legyen. A három potenciál jellegét $D^* > 0$ esetén az *ábra* mutatja.

Fontos észrevétel, hogy a szélső $(\pm A)$ pontokban V_1 érintője is megegyezik V^*-éval, hiszen itt a potenciálfüggvény meredeksége az erővel, az pedig a test maximális gyorsulásával arányos, és V_1 paraméterét éppen úgy választottuk meg, hogy a test legnagyobb gyorsulása ugyanannyi legyen a két esetben. Ez nem igaz V_2-re, de V_2 és V^* érintik egymást az origóban, ami a maximális sebességek összehangolásának következménye.



Jól látszik, hogy a $-A \le x \le A$ szakaszon a V_1 és V_2 közrefogja a V^*-ot, pl. $D^* > 0$ mellett

$$V_1(x) \le V^*(x) \le V_2(x), \qquad \text{ha} \quad -A \le x \le A,$$

és a viszony pont fordított, ha $D^* < 0$. Ugyanakkor (10) miatt

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + V_1(x) = \frac{1}{2}mv^2 + V^*(x) = \frac{1}{2}mv_2^2 + V_2(x),$$

tehát a pálya bármely adott pontjában $D^* > 0$ mellett

$$|v_1| \ge |v| \ge |v_2|,$$

aminek egyenes következménye, hogy a tényleges rezgésidőre fennáll, hogy

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} < T < T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}, \qquad \text{ha} \quad D^* > 0,$$

és a sorrend pont fordított az ellenkező esetben:

$$T_1 > T > T_2, \qquad \text{ha} \quad D^* < 0.$$

Joggal vetődik fel, hogy most melyik érték áll közelebb a valódihoz. Az a meglepő válasz, hogy a kettő számtani közepe, vagyis

$$T \approx \frac{T_1 + T_2}{2} \tag{11}$$

mindkettőnél sokkal jobb közelítés. A továbbiakban ezt fogjuk bemutatni, és becslést adunk (11) pontosságára is.

A rezgésidő kiszámítására kézenfekvőnek tűnik, hogy a $(-A, +A)$ szakaszt kicsiny Δx_i szakaszokra osztjuk, és felösszegezzük azokat a Δt_i időket, amelyek a kis szakaszok megtételéhez kellenek:

$$T = 2\sum_i \Delta t_i = 2\sum_i \frac{\Delta x_i}{v_i}.$$

(Az ehhez szükséges sebességeket az energiamegmaradásból számíthatjuk ki.) Ezzel azonban vigyáznunk kell, mert a szélső helyzetekhez közeledve a test nagyon lelassul, nagyon kicsiny sebességértékek kerülnek a nevezőbe, és ügyeskednünk kell, hogy az összeg értékét kellő pontossággal tudjuk meghatározni. Szerencsére ezt a problémát meg tudjuk kerülni, ha figyelembe vesszük, hogy a rezgés mégiscsak egy periodikus mozgás, azaz a kitérés megadható az

$$x(t) = A\sin\varphi(t)$$

alakban. Itt $\varphi(t)$ az idő monoton növekedő függvénye, és a mozgás periodikusságát az fejezi ki, hogy

$$\varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi,$$

de olyan szimmetrikus rezgés esetén, mint amit most vizsgálunk, az ennél szigorúbb

$$\varphi(t+T/2) = \varphi(t) + \pi$$

feltétel is teljesül. A $\varphi(t)$ növekedési ütemét egy pillanatnyi szögsebességgel lehet megadni. Ennek definíciója a pillanatnyi sebesség analógiájára

$$\omega(t) = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}, \qquad (\Delta t \to 0).$$

(Ezt úgy kell értenünk, hogy miközben Δt-nek egyre kisebb értékeket választunk, aközben a számláló is egyre kisebb lesz, a kettő hányadosa viszont egy konkrét értékhez közeledik. Ahogy az út – idő grafikon érintőjének a meredeksége a pillanatnyi sebesség, úgy a $\varphi(t)$ grafikon érintőjének a meredeksége az $\omega(t)$ pillanatnyi szögsebesség.) A rezgés pillanatnyi sebességét annak definíciójából kiindulva határozzuk meg:

$$v(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{A\sin(\varphi + \Delta\varphi) - A\sin\varphi}{\Delta t} = A\frac{\sin\Delta\varphi\cos\varphi - (1-\cos\Delta\varphi)\sin\varphi}{\Delta t}.$$

Mivel kicsi $\Delta\varphi$ esetén $\sin\Delta\varphi \approx \Delta\varphi$, továbbá

$$1 - \cos(\Delta\varphi) = 2\sin^2(\Delta\varphi/2) \approx (\Delta\varphi)^2/2,$$

a sebességet megadó képletben a számláló második tagja jóval kisebb, mint az első, ezért elhagyható, a maradék pedig a

$$v(t) = A\omega(t)\cos\varphi(t) \tag{12}$$

kifejezést adja. Ez nagyon hasonlít a harmonikus rezgés sebességére, de vigyázzunk, az analógia *nem* teljes, mert a gyorsulás

$$a(t) \neq -A\omega^2(t)\sin\varphi(t).$$

Ahogy a v sebesség, úgy az ω pillanatnyi szögsebesség is kifejezhető az energiamegmaradás (8) egyenlete segítségével. Az ebből adódó

$$v = \omega_0\sqrt{(A^2 - x^2)\left(1 + \frac{b(A^2+x^2)}{2}\right)}$$

kifejezésből egyszerű behelyettesítéssel kapjuk, hogy

$$\omega(t) = \omega_0\sqrt{1 + \frac{bA^2\big(1+\sin^2\varphi(t)\big)}{2}}.$$

Vegyük észre, hogy a szögsebesség az időtől csak a φ-n keresztül függ, tehát nyugodtan írhatjuk, hogy

$$\omega(\varphi) = \omega_0\sqrt{1 + \frac{bA^2(1+\sin^2\varphi)}{2}}.$$

Most már fel tudjuk írni a rezgésidőt olyan összeg formájában, amely esetében nem kell attól tartanunk, hogy a nevezőbe eltűnő mennyiség kerül. Ha a 2π tartományt kicsiny $\Delta\varphi_i$ szakaszokra osztjuk, és φ_i-nek a megfelelő szakasz egy pontját (mondjuk a felezőpontját) választjuk, akkor az adott szakasz „megtételéhez” szükséges idő $\Delta t_i \approx \Delta\varphi_i/\omega(\varphi_i)$, azaz

$$T = \sum_i \frac{\Delta\varphi_i}{\omega(\varphi_i)} = \sum_i \frac{\Delta\varphi_i}{\omega_0}\left(1 + \frac{bA^2(1+\sin^2\varphi_i)}{2}\right)^{-1/2}.$$

Az összegzés (integrál) kellő matematikai felkészültséggel egzakt módon is elvégezhető, de mi most sokkal kevesebbel is beérjük: megelégszünk azzal, hogy kiszámítsuk a T-hez a bA^2 paraméterben legalacsonyabb rendű korrekciót. Ezt a megfelelő $\sqrt{(1+y)} \approx 1 + y/2$ és $(1+y)^{-1} \approx 1 - y$ közelítésekkel átalakított

$$T \approx \sum_i \frac{\Delta\varphi_i}{\omega_0}\left(1 - \frac{bA^2(1+\sin^2\varphi_i)}{4}\right)$$

formula adja meg, ami a $\sin^2\varphi = \dfrac{1-\cos 2\varphi}{2}$ helyettesítés után

$$T \approx \sum_i \frac{\Delta\varphi_i}{\omega_0}\left(1 - \frac{3}{8}bA^2 + \frac{1}{8}bA^2\cos 2\varphi_i\right).$$

Látható, hogy a zárójelben a harmadik tag az összegzésben nullát ad (mert ugyanannyi a pozitív és a negatív járulék), a többi pedig egyszerűen szorzódik az intervallum 2π hosszával, így

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 - \frac{3}{8}bA^2\right) = T_0\left(1 - \frac{3}{8}bA^2\right). \tag{13}$$

Összehasonlításképpen T_1 és T_2 ugyanilyen pontossággal (ugyanazon $\sqrt{1+y} \approx$ $\approx 1 + y/2$ és $(1+y)^{-1} \approx 1 - y$ közelítéseket alkalmazva):

$$T_1 = \frac{T_0}{\sqrt{1+bA^2}} \approx T_0\left(1 - \frac{1}{2}bA^2\right), \tag{14}$$

illetve

$$T_2 = \frac{T_0}{\sqrt{1+bA^2/2}} \approx T_0\left(1 - \frac{1}{4}bA^2\right), \tag{15}$$

tehát valóban fennáll, hogy nagyon jó közelítéssel

$$T \approx \frac{T_1 + T_2}{2}. \tag{16}$$

Szólnunk kell még az eredményünk pontosságáról. Számolásainkban az egyhez képest kis paraméter a bA^2 mennyiség. Ahogy azt a Függelékben bemutatjuk, az alkalmazott formulák az ott y-nal jelölt kis paraméterben első rendig pontosak, az elhanyagolt tagok közül a legnagyobb y^2 nagyságrendű. Esetünkben ez azt jelenti, hogy az eredményünk hibája kb. $\left(bA^2\right)^2$. Ezt úgy szoktuk jelölni, hogy

$$T = \frac{T_1 + T_2}{2} + \mathcal{O}(A^4), \tag{17}$$

ahol az $\mathcal{O}(A^4)$ (olvasd: ordó A a negyediken) olyan – pontosabban, számszerűen nem részletezett – tagokat jelent, amelyek legfeljebb A^4 nagyságrendűek. (Az *ordo* latin szó, jelentése: *rend.*) Ezekben természetesen az A különböző hatványai mellett olyan (A-tól független) szorzótényezők állnak, amelyekkel együtt minden tag ugyanolyan dimenziójú, de ezek az együtthatók minden konkrét feladatban adottak, tehát a nagyságrendet maga az A hatványkitevője határozza meg. Összefüggésünk ebben a formában általánosnak tekinthető minden szimmetrikus anharmonikus rezgésre. Gondoljuk csak meg, ha az erőhöz hozzáadunk egy x^5-nel (azaz a potenciálhoz egy x^6-nal) arányos tagot, attól még a számolás ugyanígy elvégezhető, és arra az eredményre vezet, hogy a T, T_1 és T_2 csak A^4 nagyságrendű tagokkal módosul. Nem nő a korrekciók nagyságrendje akkor sem, ha az erőhöz (potenciálhoz) további, még gyorsabban eltűnő tagokat adunk, tehát ezek a (17) összefüggés tartalmát már nem változtatják meg.

Megjegyzés. A leírt eljárás pontosságának érzékeltetésére tekintsünk egy konkrét példát! Legyen mondjuk $D = 0{,}1$ N/cm és $D^* = 10^{-4}$ N/cm^3, vagyis $b = 10^{-3}$ cm^{-2}. Ha a rezgés amplitúdója $A = 10$ cm, akkor $bA^2 = 0{,}1$. Ez annyit jelent, hogy a legnagyobb kitérésnél az erő képletében az anharmonikus tag 10-szer kisebb, mint a Hooke-törvénynek megfelelő harmonikus tag. A rezgő test m tömege meghatározza a nagyon kicsi kitérésekhez tartozó T_0 rezgésidőt, ennek számszerű értékére a relatív eltérések számításánál nincs szükségünk.

A (14), (15) és (16) összefüggéseknek megfelelően a harmonikus mozgással közelített rezgések periódusideje:

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{1+0{,}1}}\,T_0 = 0{,}9535\,T_0,$$
$$T_2 = \frac{1}{\sqrt{1+0{,}05}}\,T_0 = 0{,}9759\,T_0,$$

és ezek számtani közepe

$$T_{\text{átlag}} = 0{,}9647\,T_0.$$

Másrészt az $\omega(\varphi) = \dfrac{2\pi}{T_0}\sqrt{1+0{,}05(1+\sin^2\varphi)}$ függvény reciprokának integrálásával (pl. a `www.wolframalpha.com` segítségével) megkaphatjuk az anharmonikus rezgések „pontos” periódusidejét:

$$T = \int_0^{2\pi}\frac{1}{\omega(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi = \frac{T_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{1+0{,}05(1+\sin^2\varphi)}}\,\mathrm{d}\varphi = 0{,}9645\,T_0.$$

Ezekből a számokból leolvasható, hogy T_1 és a pontos érték relatív eltérése $-1{,}14\%$, ugyanez T_2-nél $+1{,}18\%$, míg az átlagolt közelítő rezgésidőre a relatív eltérés mindössze $2\cdot 10^{-4}$.

Függelék

1. Erők és potenciálok egy dimenzióban

Ha egy esetben az erő kizárólag a helytől függ (azaz nem függ pl. a mozgásállapottól), tehát $F = F(x)$, akkor ebben a rendszerben definiálható a $V(x)$ helyzeti energia, más néven potenciális energia, vagy egyszerűen potenciál. Ez a fizikai mennyiség megegyezik azzal a munkával, amit az $F(x)$ *ellenében* kell végeznünk, ha a testet egy előre kiválasztott x_0 pontból az x pontba visszük. A kiszámításához az (x, x_0) szakaszt x_i osztópontokkal olyan kicsiny szakaszokra vágjuk, hogy azokban az erő egy-egy szakaszon belül már állandónak vehető legyen, és a potenciált a

$$V(x) = \sum_i -F(x_i')\Delta x_i \tag{F. 1}$$

összeg adja meg. Itt az x_i' a $\Delta x_i = (x_{i+1} - x_i)$ előjeles (irányított) szakasz egy pontja. Nyilván, ha az a koordinátájú pontból visszük a testet a b koordinátájú pontba, akkor $W(b, a) = V(b) - V(a)$ munkát kell végeznünk. Jól látszik, hogy a $V(x)$-hez hozzáadhatunk egy tetszőleges x-független értéket, mert az az energiaváltozásból úgyis kiesik. Azt is könnyen beláthatjuk, hogy ha az eredő erőt több erő összege adja meg, az eredő potenciál az egyes erőkhöz tartozó potenciálok összege lesz. A potenciál konstrukciójából következik, hogy

$$F(x) = -\frac{V(x + \Delta x) - V(x)}{\Delta x}, \tag{F. 2}$$

ha Δx nagyon kicsi. (A differenciálszámításban jártasak felismerik: $F(x)$ a $-V(x)$ függvény deriváltja.)

Ennek alapján pl. könnyen belátható, hogy ha az erő $F = -kx^3$ alakú, akkor a hozzá tartozó potenciál $V = (kx^4)/4$ szerint függ az x-től:

$$\frac{k}{4}\frac{(x + \Delta x)^4 - x^4}{\Delta x} = \frac{k}{4}\big(4x^3 + 6x^2\Delta x + 4x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3\big).$$

(Ezt a kifejezést a binomiális tétel alkalmazásával kaptuk.) Ha Δx-et egyre kisebbnek („végtelenül kicsinek") választjuk, a zárójelben csak az első tag marad véges, tehát az erő valóban $-kx^3$.

Megjegyzés. A fenti megfontolás (miszerint az erőfüggvény mindig egy potenciálfüggvényből származtatható deriválással) csak egydimenziós erőtereknél érvényes. Két- vagy háromdimenziós erőtereknél (ha azok „nem konzervatívak", más náven: örvényesek) előfordulhat, hogy potenciálfüggvény nem létezik.

2. Két közelítő formula és ezek pontossága

2/1. A geometriai sor összegképlete szerint $|y| < 1$ esetén

$$\frac{1}{1+y} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n.$$

Ha $|y| \ll 1$, az egymást követő tagok lényegesen kisebbek, mint a megelőző tag. Akkor, ha valahol „levágjuk" az összeget, az ezzel elkövetett hiba nagyságrendje azonos az első elhanyagolt tag nagyságrendjével. Így az

$$\frac{1}{1+y} \approx 1 - y \tag{F. 3}$$

közelítés hibája y^2 nagyságrendű. Fontos megjegyeznünk, hogy itt a nagyságrend nem egyszerűen azt jelenti, hogy „nagyjából akkora (jelen esetben: olyan kicsi), mint", hanem – függvényről lévén szó – azt is, hogy „körülbelül úgy viselkedik, mint". Esetünkben a hiba pontosan $y^2/(1+y)$, de mivel kicsi y esetén az $1/(1+y)$ lassan változik, a hiba viselkedésének a jellegét is az y hatványkitevője határozza meg.

2/2. Egy másik közelítő képlet, amit gyakran használunk, a $\sqrt{1+y}$-re vonatkozik. Itt a következő átalakítással élünk:

$$\sqrt{1+y} = \sqrt{\Big(1 + \frac{y}{2}\Big)^2 - \Big(\frac{y}{2}\Big)^2} = \Big(1 + \frac{y}{2}\Big)\sqrt{1 - \frac{(y/2)^2}{(1+y/2)^2}}. \tag{F. 4}$$

Látni való, hogy gyök alatt egy ugyanolyan típusú kifejezés (az egy mellett egy kicsi tag) szerepel, mint a kiinduló kifejezésben, ráadásul ez közelebb van az egyhez, mint az eredeti. Így az eljárás akárhányszor megismételhető, ezzel egyre több tényező hozható ki a gyök alól úgy, hogy közben az ott maradó kifejezés egyre jobban megközelíti az egyet. Mi most nem ezt az utat választjuk, hanem megelégszünk azzal, hogy megbecsüljük a

$$\sqrt{1+y} \approx 1 + \frac{y}{2} \tag{F. 5}$$

első közelítés hibáját. Ez

$$\Big(1 + \frac{y}{2}\Big) - \sqrt{1+y} = \frac{(y/2)^2}{(1+y/2) + \sqrt{1+y}}.$$

Ha most $|y| \ll 1$, a jobb oldal nevezője egy 2-höz közeli szám, vagyis (F. 5) hibája is y^2 nagyságrendű.

Woynarovich Ferenc
Budapest