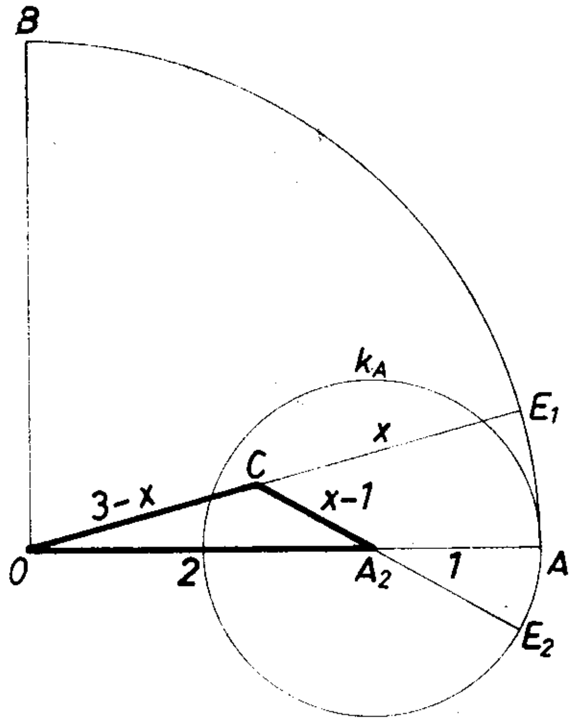
Mivel a feladat szövege a feladatban szereplő félköröknek csak az átmérőjét írja elő, egyelőre tekintsük az AA_1 és BB_1 átmérőjű köröket (és persze az AB negyedkörívet) azoknak az alakzatoknak, amelyeket érintenie kell a keresett körnek. A továbbiakban az AA_1, ill. BB_1 átmérőjű köröket jelölje k_A, ill. k_B, a keresett kört pedig k. Ha k kívülről érintené az AB ívet, vagy az AB ív érintené belülről k-t, akkor k-nak A-ban és B-ben egyidejűleg kellene érintenie az AB ívet, mivel k_A és k_B az AB ívet tartalmazó kör belsejében vannak. Ilyen feltételek mellett k csak maga az AB ívet tartalmazó kör lehetne. Két körív azonossága esetén viszont nem mondjuk azokat érintkezőknek.

Tehát k, belülről érinti az AB ívet, és k_A, k_B és k kölcsönös elhelyezkedését illetően a következő lehetőségek vannak: k_A és k_B érinthetik k-t 1. mindketten belülről, 2. mindketten kívülről, 3. egyikük belülről, másikuk kívülről. Mivel az adott körök az AOB szög szögfelezőjére nézve szimmetrikusan helyezkednek el, az első esetben k középpontja is az AOB szög szögfelezőjén van, a harmadik esetben pedig az OA vagy az OB szögszáron van k középpontja aszerint, hogy k_A vagy k_B érinti-e k-t belülről.

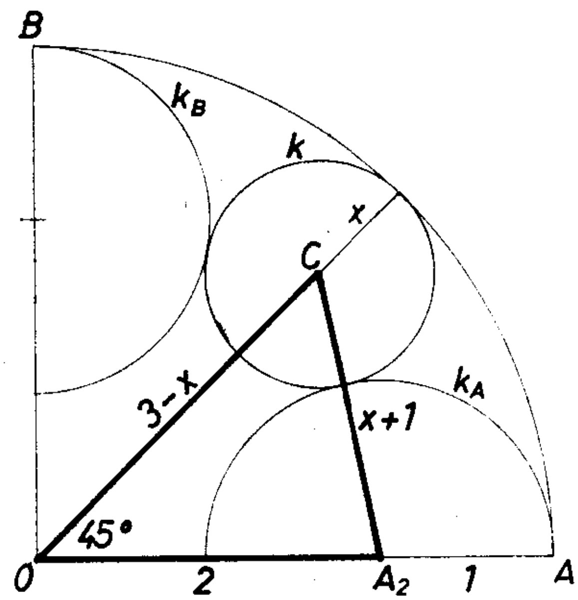
Érintse ugyanis k-t pl. k_A belülről (1. ábra).



1. ábra

Jelölje k középpontját C, sugarát x, az AB ív és k érintési pontját E_1, k és k_A érintési pontját E_2, k_A középpontját A_2. Mivel $OC = 3 - x$, $CA_2 = x - 1$, $OA_2 = 2$, ezért $OC + CA_2 = OA_2$. Az OCA háromszög elfajuló, tehát C az OA egyenesen van.

A harmadik esetben mondottak az első esetre kétszeresen is alkalmazhatók, ezért az első esetben k középpontja csak O lehetne. Mivel azonban magát az AB ívet tartalmazó kört nem tekintjük megoldásnak, az első lehetőséget elvetjük.



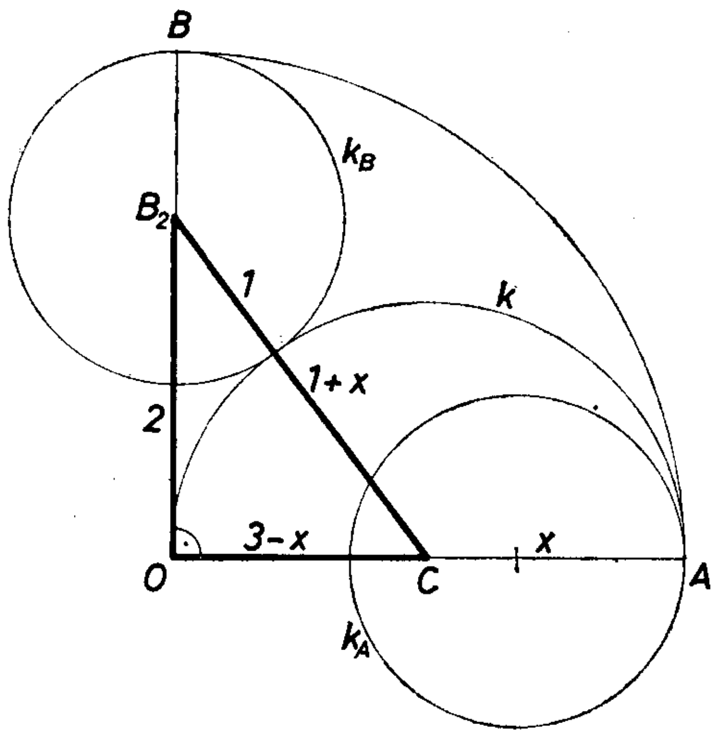
2. ábra

A második esetben (2. ábra) a k kör sugarát x-szel jelölve a koszinusz-tétel szerint

$$(1+x)^2 = 4 + (3-x)^2 - 4(3-x)\cos 45^\circ$$

ahonnan

$$x = \frac{6-3\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} = \frac{9-3\sqrt{2}}{7} \approx 0{,}6796\ldots.$$



3. ábra

A harmadik esetben az OB_2C derékszögű háromszögben (3. ábra)

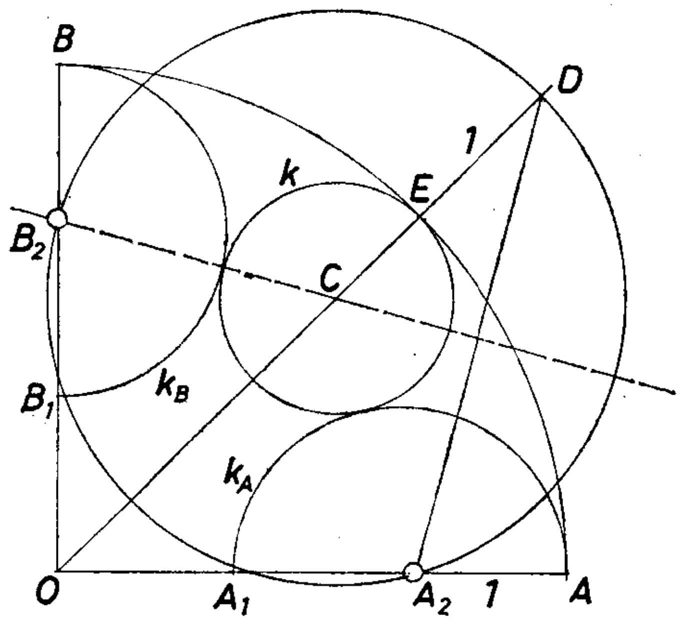
$$(1+x)^2 = 4 + (3-x)^2,$$

ahonnan

$$x = 1{,}5.$$

Tehát a harmadik esetben a keresett kör középpontja az OA, ill. OB szakaszok felezőpontja lehet. Megállapodás dolga, hogy ezeket megoldásnak tekintjük-e, hiszen az érintési pontok ebben az esetben a feladatban szereplő körívek végpontjai.

Foglalkoznunk kell még a második esetben k középpontjának megszerkesztésével. Növeljük meg k sugarát az egységgel. Az így kapott kör átmegy a k_A kör A_2 és a k_B kör B_2 középpontján, továbbá az AOB szög szögfelezőjén levő, az O-tól 4 egységnyire fekvő D ponton (4. ábra).



4. ábra

Az A_2B_2D háromszög köré írható kör középpontját kell tehát megszerkesztenünk. Az így kapott C pontnak az OD egyenes és az AB negyedkörív E metszéspontjától való távolsága a keresett kör sugara.

Heckenast László (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)