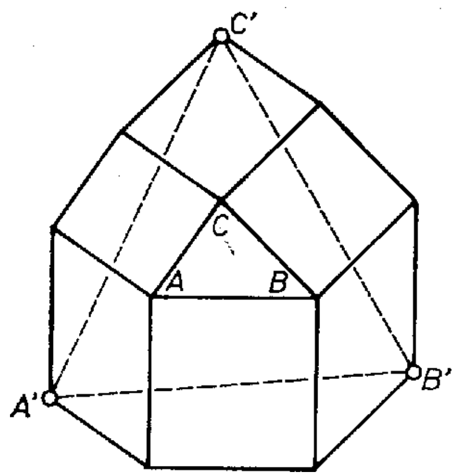
Ebben a rovatban havonként tíz–tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot mondunk el, amelyek előkészítőül szolgálnak a Matematikai Diákolimpiára. A feladatok megoldásait nem kérjük beküldeni, a megoldásokat sem fogjuk ismertetni. Az érdeklődők a feladatokkal kapcsolatos kérdéseikkel forduljanak a szerkesztőséghez. Leveleikre írásban válaszolunk.

1. Adott a síkban 6 pont: $P_1,\ P_2,\ P_3,\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3$ úgy, hogy a $\overrightarrow{P_iP_k}$ párhuzamos és egyirányú a $\overrightarrow{Q_kQ_i}$-ral ($i=1,\ 2,\ 3$). Bizonyítsuk be, hogy ekkor a P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 egyeneseknek van közös pontja.

2. Az ABC háromszög mindegyik oldala fölé, kefelé szerkesszünk négyzetet, majd a háromszög csúcsainál adódó két-két szakaszt egészítsük ki paralelogrammává. A paralelogrammák új csúcsai legyenek rendre A', B' és C'.



Igazoljuk, hogy

a) az ABC háromszög és az $A'B'C'$ háromszögek súlypontja egybeesik;

b) az $A'B'C'$ oldalai áthaladnak egy-egy négyzet középpontján;

c) az AA' merőleges a BC oldalra.

3. Legyen ABC szabályos háromszög, továbbá legyenek AA_1A_2, BB_1B_2, CC_1C_2 egyező körüljárású szabályos háromszögek. Az A_2B_1, B_2C_1, C_2A_1 szakaszok felezőpontjai X, Y, Z. Mutassuk meg, hogy XYZ is szabályos háromszög.

4. Legyenek A, B, C, D és E egy sík pontjai. Jelöljük T_{XYZ}-vel az XYZ háromszög előjeles területét (azaz ha X, Y, Z ebben a sorrendben pozitív körüljárású, a háromszög területe pozitív, az ellenkező esetben negatív.) Bizonyítsuk be, hogy

$$T_{EAB}\cdot T_{BCD}+T_{EAD}\cdot T_{EBC}=T_{EAC}\cdot T_{EBD}.$$

5. Az $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c},\ \mathbf{d}$ egy síkben levő vektorok összege $\mathbf{0}$. Mutassuk meg, hogy

$$|\mathbf{a}|+|\mathbf{b}|+|\mathbf{c}|+|\mathbf{d}|\geq|\mathbf{a}+\mathbf{d}|+|\mathbf{b}+\mathbf{d}|+|\mathbf{c}+\mathbf{d}|.$$

6. Adott a síkben n egységvektor úgy, hogy összegük $\mathbf{0}$. Bizonyítsuk be, hogy minden $1\leq k\leq n$-re kiválasztható közülük $k$darab úgy, hogy ezek eredőjének hossza legfeljebb 3.

7. Adott néhány vektor a síkban, melyek hosszainak összege pontosan 4. Bizonyítandó, hogy kiválasztható közülük néhány, melyek eredőjének hossza legalább 1.

8. *a*.) Egy tetraéder súlyvonalai egenlő hosszúak. Igazoljuk, hogy ekkor a szemközti élek is egyenlő hosszúak.

b) Egy tetraéder súlyvonalai merőlegesek a szmeközti lapra. Igazoljuk, hogy a tetraéder szabályos.

9. *a*) Két páros oldalszámú konvex sokszög oldalfelező pontjai egybeesnek. Bizonyítsuk be, hogy területük egyenlő.

b) Egy konvex n-szög területe T, az oldalfelező pontok által meghatározott n-szög területe F. Az oldalakat p/q aránybn osztjuk ($p+q=1$), az osztópontok kal meghatározott n-szög területe S. Bizonyítsuk be, hogy

$$S=(p+q)^2\,T+4pqF.$$

10. Egy háromszög köré írt kör középpontjából a csúcsokba mutató vektorok $\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}$, továbbá $\lambda_1\mathbf{a}+\lambda_2\mathbf{b}+\lambda_3\mathbf{c}=\mathbf{0}$. Fejezzük ki a λ-k arányát a háromszög szögeivel.

Ajánlott irodalom: Reiman István: Geometriai feladatok megoldása a komplex számsíkon; Reiman István: Vektorok a geometriában; (Középisk. Szakköri Füzet, Tankönyvkiadó, 1971 Bp.); Lukács Ottó: Koordináta-geometria vektorokkal a síkban és a térben; Skljarszkij-Csencov-Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi geometria köréből, Geometria II. (Planimetria) (Tankönyvkiadó 1972 Bp.)