Mostani számunktól kezdve havonként tíz-tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot fogunk ebben a rovatunkban elmondani, amelyek a matematikai Diákolimpiára előkészítőül szolgálnak. A feladatok megoldásait **nem** kérjük beküldeni, és a megoldásokat sem fogjuk ismertetni. Az érdeklődők a feladatmegoldásokkal kapcsolatos mindennemű kérdéseikkel, forduljanak a szerkesztőséghez. A kérdésekre levélben válaszol a rovatvezető.

1. Legyenek $a$ és $b$ pozitív egész számok. Igazoljuk, hogy

$$2 \cdot \sqrt[a+b]{a^{2b} \cdot b^{2a}} \leq a^2 + b^2.$$

2. Legyenek $a, b, c$ pozitív számok. Igazoljuk az alábbi egyenlőtlenségeket:

*a)* $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$,

*b)* $abc \geq (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$,

*c)* $a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2 b + b^2 c + c^2 a$.

3. Tudjuk, hogy $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Mutassuk meg, hogy

$$-1/2 \leq ab + bc + ca \leq 1/2.$$

4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számokra

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

5. Jelöljük az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok mértani közepét $G_n$-nel. Igazoljuk, hogy

$$a_n \geq nG_n - (n-1)G_{n-1}.$$

6. Igazoljuk, hogy ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív számok szorzata 1, akkor

*a)* $(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n$,

*b)* $(1+a_1)(2+a_2)\ldots(n+a_n) \geq n^{n/2}$.

7. Legyenek $a_i > 1$ valós számok. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+a_i} \geq \frac{n}{1+\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}.$$

8. Az $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$, valamint $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n > 0$ valós számokról tudjuk, hogy

$$a_1 \geq b_1; \quad a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2; \ldots; a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geq b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

Mutassuk meg, hogy ekkor $a_1^k + a_2^k + \ldots + a_n^k \geq b_1^k + b_2^k + \ldots + b_n^k$ minden $k$ természetes számra.

9. A $p$ és $q$ adott pozitív számok, továbbá $p \leq a,\ b,\ c \leq q$. Mutassuk meg, hogy ekkor

$$(a+b+c+d)\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\Big) \leq 25 + 6\Big(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\Big)^2.$$

10. Mutassuk meg, hogy ha $x_i > 0$ és $x_i y_i - z_i^2 > 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$, akkor

$$\frac{n^3}{\Big(\sum_{i=1}^n x_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^n y_i\Big) - \Big(\sum_{i=1}^n z_i\Big)^2} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i y_i - z_i^2}.$$

Ajánlott irodalom: Késedi Ferenc: Egyenlőtlenségek,
Skljarszkij, Csencov, Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből I. rész Aritmetika és algebra.