AZ ISKOLARÁDIÓ MATEMATIKA SZAKKÖRE

A legközelebbi adásunk *1977. május 23án (hétfőn) a 3. műsorban* hangzik el *15.30–16.00 óráig.* Címe: *A nagy számok törvénye és következményei.*

Ezzel az adással egy négy részes sorozat zárul. Az előző adások címe (és időpontja, valamint KÖMAL-beli helye) a következő volt: Válasszuk a valószínűbbet (II. 28.–54. kötet 1. szám, 26–29. old.), Fogadjunk (III. 28.–54. kötet 2. szám, 75–77. old.). Mikor igazságos egy játék? (IV. 25.–54. kötet 3. szám, 121–124. old.)

Markov és Csebisev egyenlőtlensége

A számok tetszőleges összességét számcsoportnak neveztük. A ξ számcsoport várható értékét $E(\xi)$-vel, szórását $D(\xi)$-vel jelöltük, $G(\xi\in H)$ jelölte ξH-hoz tartozó elemeinek a számát, $G(\xi)$ pedig ξ összes elemének a számát.

Tétel. Legyen ξ tetszőleges számcsoport, csak annyit tegyünk fel, hogy ξ elemei nem negatívak, és legyen A tetszőleges pozitív szám, akkor

$$G(\xi\geqq A)\leqq\frac{1}{A}G(\xi)E(\xi).$$

Bizonyítás. Jelöljük η-val azt a számcsoportot, amelyet ξ-ből úgy kapunk, hogy elhagyjuk az elemek közül az A-nál kisebbeket, és jelöljük e két számcsoport elemeinek az összegét $S(\xi)$-vel, $S(\eta)$-val. Mivel feltevésünk szerint ξ elemei nem negatívak, nem negatív a ξ-ből η-ba át nem került számok összege is, tehát

$$S(\xi)\leqq S(\eta).$$

Ez utóbbi viszont legalább $AG(\eta)$, hiszen η-ban nincs A-nál kisebb elem. Mivel $G(\eta)=G(\xi\geq A)$, ez azt jelenti, hogy

$$S(\xi)\geqq AG(\xi\geqq A).$$

Ebből viszont $E(\xi)=S(\xi)/G(\xi)$ miatt már következik a bizonyítandó, Markovtól származó egyenlőtlenség.

Tétel. Legyen ξ tetszőleges számcsoport, és legyen ε tetszőleges pozitív szám, akkor

$$G(|\xi-E(\xi)|\geqq\varepsilon)\leqq\frac{1}{\varepsilon^2}G(\xi)D^2(\xi).$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk Markov egyenlőtlenségét az

$$\eta=\big(\xi-E(\xi)\big)^2$$

számcsoportra. Ennek az elemeit úgy kapjuk meg ξ elemeiből, hogy mindegyikből levonunk $E(\xi)$-t, és a különbségeket rendre négyzetre emeljük. Az η számcsoportnak nyilván ugyanannyi eleme van, mint ξ-nek, és η várható értéke nem más, mint ξ szórásnégyzete:

$$G(\eta)=G(\xi),\qquad E(\eta)=D^2(\xi).$$

Így Markov egyenlőtlenségéből következik, hogy

$$G(|\xi-E(\xi)|\geqq\varepsilon)=G(\eta\geqq\varepsilon^2)\geqq\frac{1}{\varepsilon^2}G(\eta)E(\eta)=\frac{1}{\varepsilon^2}G(\xi)D^2(\xi),$$

ami épp a bizonyítandó, Csebisevtől származó egyenlőtlenség.

A nagy számok törvénye és következményei

Tétel. Legyenek a $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n,\ldots$ számcsoportok azonosak, és legyen ε tetszőleges pozitív szám, akkor van olyan N, hogy minden $n>N$ mellett

$$G\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-E(\xi_1)\right|\geqq\varepsilon\right)<\varepsilon G\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right).$$

Bizonyítás. Jelöljük az $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ számcsoportot η_n-nel. Ezt tehát úgy kapjuk meg, hogy összeadjuk a ξ_1, ξ_2, …, ξ_n számcsoportokat, és a kapott számcsoport minden elemét elosztjuk n-nel. Előző adásunkban beláttuk, hogy számcsoportok összegének várható értéke és szórásnégyzete a tagok várható értékének, illetve szórásnégyzetének összege. Emiatt

$$E(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n=nE(\xi_1),$$
$$D^2(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n)=nD^2(\xi_1).$$

Ha egy számcsoport elemeit elosztjuk n-nel, az új számcsoport várható értéke is, szórása is az eredeti n-ed része lesz, tehát

$$E(\eta_n) = E(\xi_1), \qquad D^2(\eta_n) = \frac{1}{n} D^2(\xi_1).$$

Így Csebisev egyenlőtlensége szerint

$$G\big(|\eta_n - E(\xi_1)| \geqq \varepsilon\big) \leqq \frac{1}{\varepsilon^2} G(\eta_n) D^2(\eta_n),$$

ez pedig kisebb lesz $\varepsilon G(\eta_n)$-nél, ha

$$n > \frac{1}{\varepsilon^3} D^2(\xi_1),$$

tehát $N = \dfrac{1}{\varepsilon^3} D^2(\xi_1)$ mellett teljesül a tételben szereplő egyenlőtlenség.

Ha például a $\xi_1 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ számcsoportból indulunk ki, az

$$s_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$$

számcsoport elemeit (ahol ξ_i azonos ξ_1-gyel) úgy is megkaphatjuk, hogy meghatározzuk a

$$p_n(x) = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^n$$

polinom együtthatóit. Könnyen látható ugyanis, hagy s_n-ben a j szám pontosan annyiszor fordul elő, mint amennyi p_n-ben x^j együtthatója. A mellékelt 1. táblázatban megadjuk néhány n és j mellett a megfelelő együtthatókat. Hatványozás közben azt tapasztaljuk, hogy adott n esetén a nagyobb együtthatók egy bizonyos x hatvány körül helyezkednek el, és ez a „sűrűsödési hely” egyenletes sebességgel halad előre ahogy n nő. Így van ez, akármilyen más,

$$p_1(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i,$$

egészegyütthatós polinomból indulunk is ki, és a sűrűsödési hely vándorlási sebessége csak annak a ξ_1 számcsoportnak a várható értékétől függ, amelyben az i szám a_i-szer fordul elő, hiszen tételünk szerint az n-edik hatvány sűrűsödési helye éppen $nE(\xi_1)$.

Joggal vetődik fel ezek után a kérdés, mi köze mindennek a véletlen számokhoz? Hát az, hogy ha egy kocka lapjaira a 0, 1, 2, 3, 4, 5 számokat írjuk, és a kockát sokszor feldobjuk, akkor a dobott számok átlaga egyre közelebb lesz $\xi = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ számcsoport várható értékéhez, 2,5-hez. Vagy ha n dobásban megszámoljuk a dobott számok között mondjuk a párosak számát, és a kapott számot elosztjuk n-nel, a hányados (a páros számok „relatív gyakorisága”) tart a $G(\xi \text{ páros})/G(\xi)$ hányadoshoz. Szokás ennek alapján tetszőleges ξ számcsoport és a valós számok tetszőleges H részhalmaza mellett a $G\big(\xi \in H\big)/\big(G(\xi)\big)$ hányadost a $\xi \in H$ esemény valószínűségének nevezni, és ezt a hányadost $P(\xi \in H)$-val jelölni:

$$P(\xi \in H) = \frac{G(\xi \in H)}{G(\xi)}.$$

Könnyen látható, hogy tételünk azt jelenti, hogy a ξ számcsoport által generált véletlen szám elég hosszú ξ_n realizációjában a $G(\xi_n \in H)/G(\xi_n)$ relatív gyakoriság közel lesz a $P(\xi \in H)$ valószínűséghez.

Örülnénk azonban, ha az érzékeny fülű olvasó hitetlenkedve fogadná mindezt. Hiszen tételünk csak számcsoportokról szól, és nem véletlen számokról. Mi tudjuk, hogyan kell véletlen számokat összeadni. Kérdés, hogy a véletlen számok tudják-e ezt. Nem tudjuk, hogy a számcsoportok általunk adott definíciója megfelel-e a véletlen számok összegezési szabályának. Igen is, meg nem is.

Igyekeztünk a definíciónkat úgy kialakítani, hogy közben állandóan a véletlen számokra gondoltunk. Egy dologról azonban nem szabad megfeledkeznünk: mi hallgatólagosan mindig feltettük, hogy a véletlen számot valamilyen szerkezet, berendezés, eljárás állítja elő, ez az apparátus akárhány számot elő tud állítani, és az egyes számok nem befolyásolják egymást. A valószínűségszámításban ezt úgy mondják, hogy az egyes számok függetlenek és egyforma eloszlásúak. Végül is azt kaptuk tehát, hogy annak, hogy a tételünk véletlen számokra is igaz legyen, épp az a feltétele, hogy a véletlen számok úgy viselkedjenek, mint a számcsoportok.

A centrális határeloszlástétel

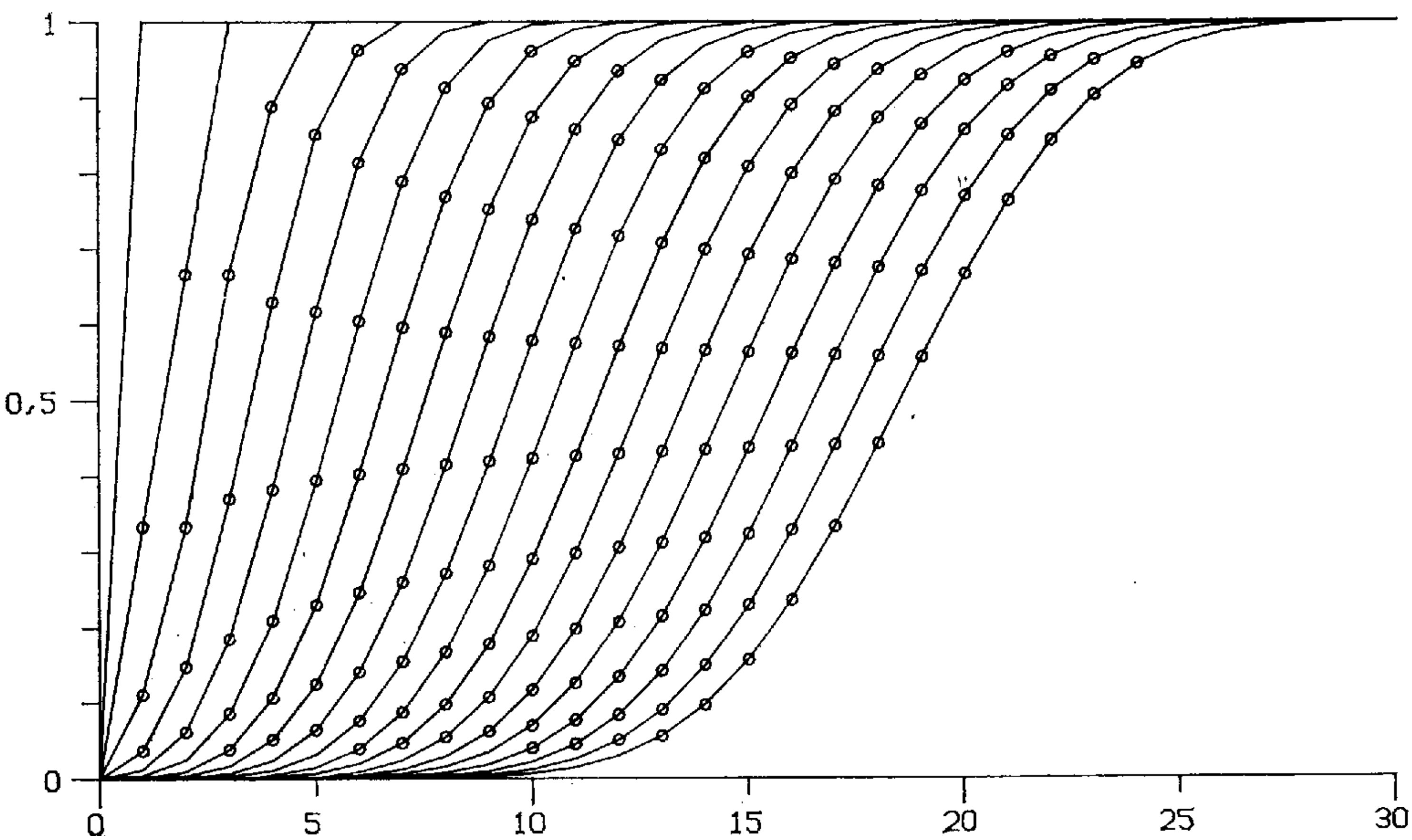
Tétel. Legyenek a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ számcsoportok azonosak, és jelöljük az

$$\eta_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \xi_i - nE(\xi_1)}{\sqrt{n} D(\xi_1)}$$

számcsoport eloszlásfüggvényét $F_n(x)$-szel. Akkor az $\{F_n(x),\ n = 1,\ 2,\ \ldots\}$ sorozat tetszőleges x mellett konvergál, és a határértéke az eredeti ξ_1 számcsoport eloszlásától független $\Phi(x)$ szám.

Ez a tétel Gausstól származik, a $\Phi(x)$ eloszlásfüggvényt Gauss vagy normális eloszlásnak nevezik.

Tulajdonképpen nem volna lehetetlen ezt a tételt ismereteink alapján bebizonyítani, erre itt lényegében csak hely (és idő) hiány miatt nem kerül sor. A $\xi_1 = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ számcsoport mellett az $F_{14}(x)$ függvény néhány értékét a megfelelő $\Phi(x)$ számokkal a mellékelt 1. táblázatban mutatjuk be. Javasoljuk az olvasónak, hogy tetszőlegesen választott ξ_1 számcsoportból kiindulva állítsa elő az $F_n(x)$ eloszlásfüggvényeket, tapasztalni fogja tételünk helyességét. Mi a mellékelt ábrán a $\xi_1 = \{0,\ 1,\ 2\}$ számcsoport esetében a szemléletesség kedvéért magának a $(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n)$ összegnek mutatjuk be az eloszlásfüggvényét néhány n-re.



A kitűzött feladatok megoldása

1. feladat. A mesterségesen előidézett intelligencia romlásának a sebessége egyenes arányban van a növekedés mennyiségével.

2. feladat. A nyolctalálatos szelvény: x, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 1. (A mellékelt 2. táblázatban megadjuk a szóban forgó változók néhány értékének a valószínűségét.)

3. feladat. A regresszió egyenes egyenlete: $y = 0{,}5x + 80{,}5$. (Általában $y = b(x - \overline{x}) + \overline{y}$ ahol $b = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x}) / \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$).

4. feladat. A mellékelt 3. táblázatban megadjuk a szóban forgó változók eloszlásfüggvényét.

5–6. feladat. Megoldásukat később közöljük.

1. táblázat

$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)$ hatványai és a normális eloszlás

j	1	2	3	4	7	14	x_j	$F_{14}(x_j)$	$\Phi(x_j)$
0	1	1	1	1	1	1			
1	1	2	3	4	7	14			
2	1	3	6	10	28	105			
3	1	4	10	20	84	560			
4	1	5	15	35	210	2 380			
5	1	6	21	56	462	8 568			
6		5	25	80	917	27 118			
7		4	27	104	1 667	77 324			
8		3	27	125	2 807	202 020			
9		2	25	140	4 417	489 580			
10		1	21	146	6 538	1 110 746			
11			15	140	9 142	2 376 192	$-3{,}677$	0,0001	0,0001
12			10	125	12 117	4 820 543	$-3{,}521$	0,0001	0,0002
13			6	104	15 267	9 316 594	$-3{,}365$	0,0002	0,0004
14			3	80	18 327	17 218 995	$-3{,}208$	0,0005	0,0007
15			1	56	20 993	30 529 240	$-3{,}051$	0,0008	0,0011
16				35	22 967	52 063 571	$-2{,}895$	0,0015	0,0019
17				20	24 017	85 593 522	$-2{,}738$	0,0026	0,0031
18				10	24 017	135 917 523	$-2{,}582$	0,0043	0,0049
19				4	22 967	208 814 424	$-2{,}426$	0,0070	0,0076
20				1	20 993	310 829 610	$-2{,}269$	0,0110	0,0116
21					18 327	448 854 900	$-2{,}113$	0,0167	0,0173
22					15 267	629 486 676	$-1{,}956$	0,0247	0,0253
23					12 117	858 182 052	$-1{,}800$	0,0357	0,0359
24					9 142	1 138 276 503	$-1{,}643$	0,0502	0,0502
25					6 538	1 469 971 230	$-1{,}487$	0,0690	0,0685
26					4 417	1 849 435 329	$-1{,}330$	0,0926	0,0918
27					2 807	2 268 186 480	$-1{,}174$	0,1215	0,1201
28					1 667	2 712 905 781	$-1{,}017$	0,1561	0,1546
29					917	3 165 803 382	$-0{,}861$	0,1965	0,1947
30					426	3 605 583 723	$-0{,}704$	0,2425	0,2408
31					210	4 008 970 980	$-0{,}548$	0,2937	0,2919
32					84	4 352 660 949	$-0{,}391$	0,3492	0,3479
33					28	4 615 482 690	$-0{,}235$	0,4081	0,4071
34					7	4 780 499 451	$-0{,}078$	0,4691	0,4689
35					1	4 836 766 584	$-0{,}078$	0,5309	0,5311

2. táblázat

A januári betűtotó változóinak az eloszlása (a lottóösszeg lehetséges értékeit 10-zel osztottuk, a megfelelő valószínűségeket 10-zel szoroztuk)

Szám	Érme	Totó	Kártya	Kocka	Lottó	Lottó-összeg	Kocka-összeg	Tiszta fej
0	0,000	0,003	0,013	0,194	–	–	–	0,000
1	0,000	0,024	0,080	0,349	0,056	–	–	0,010
2	0,000	0,078	0,206	0,279	0,053	0,000	–	0,203
3	0,001	0,156	0,286	0,130	0,051	0,000	–	0,309
4	0,005	0,214	0,239	0,039	0,048	0,000	–	0,228
5	0,015	0,214	0,125	0,008	0,046	0,000	0,000	0,128
6	0,037	0,160	0,042	0,001	0,044	0,001	0,001	0,064
7	0,074	0,092	0,009	0,000	0,042	0,001	0,002	0,031
8	0,120	0,040	0,001	0,000	0,040	0,002	0,005	0,015
9	0,160	0,013	0,000	0,000	0,038	0,004	0,009	0,007
10	0,176	0,003	0,000	–	0,036	0,006	0,016	0,003
11	0,160	0,001	0,000	–	0,034	0,009	0,026	0,001
12	0,120	0,000	0,000	–	0,032	0,012	0,039	0,001
13	0,074	0,000	0,000	–	0,031	0,017	0,054	0,000
14	0,037	0,000	–	–	0,029	0,023	0,069	0,000
15	0,015	–	–	–	0,028	0,029	0,084	0,000
16	0,005	–	–	–	0,026	0,036	0,095	0,000
17	0,001	–	–	–	0,025	0,043	0,100	0,000
18	0,000	–	–	–	0,023	0,050	0,100	0,000
19	0,000	–	–	–	0,022	0,056	0,095	0,000
20	0,000	–	–	–	0,021	0,061	0,084	0,000
21	–	–	–	–	0,020	0,065	0,069	–
22	–	–	–	–	0,019	0,068	0,054	–
23	–	–	–	–	0,017	0,068	0,039	–

3. táblázat

Kilenc kockán dobott piros lapok számának az eloszlása, ha egy kockán k piros lap van

Legfeljebb	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$
0	1,000	0,194	0,026	0,002	0,000	0,000	0,000
1	1,000	0,543	0,143	0,020	0,001	0,000	0,000
2	1,000	0,822	0,377	0,090	0,008	0,000	0,000
3	1,000	0,952	0,650	0,254	0,042	0,001	0,000
4	1,000	0,991	0,855	0,500	0,145	0,009	0,000
5	1,000	0,999	0,958	0,746	0,350	0,048	0,000
6	1,000	1,000	0,992	0,910	0,623	0,178	0,000
7	1,000	1,000	0,999	0,980	0,857	0,457	0,000
8	1,000	1,000	1,000	0,998	0,974	0,806	0,000
9	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Sorozatunk készítői

Sorozatunk négy iskolában készült a következő tanulók és tanárok részvételével.

Berzsenyi D. Gimnázium. Tanulók: Cseh Tibor, Horváth Zoltán, Iring Zoltán, Karsai Ferenc, Klebercz Attila, Kormos Mária, Korom Melinda, Kővári Klára, Radácsy Katalin, Szathmári György. Tanárok: Simon Judit és Nemetz Tibor

Dózsa Gy. Gimnázium. Tanulók: Bodrog Beáta, Bubcsó Gábor, Galambos Sándor, Gróf Jolán, Karikás Ágnes, Kövesdi Kinga, Zeibig Károly. Tanárok: Tusnády Gáborné és Tusnády Gábor.

Móricz Zs. Gimnázium. Tanulók: Bach Judit, Bacsó Piroska, Bajnok Béla, Butyka Beáta, Fazekas Eszter, Győrbiró Bea, Karády Zoltán, Kiss Péter, Klimó Gábor, Kovács István, Molnár Géza, Papp László, Péter Katalin, Solt Gábor, Schindele Miklós, Szentiványi Árpád, Tóth Zoltán, Varga László, Venczel György, Zimonyi Ferenc, Zsáry Anikó. Tanár: Némethy Katalin.

Radnóti M. Gimnázium. Tanulók: Ábrahám Erzsébet, Balázs Péter, Balogh Ágnes, Farkas Miklós, Galánfi Klára, Gál Róbert, Ganczer Sándor, Greschik Gyula, Hankó Zsuzsa, Héder Barna, Kapus András, Koncz Károly, Konrád Zoltán, Prazsák Gabriella, Papp János, Ungár Katalin, Váli Ruth, Varga Zsolt, Zimányi Krisztina. Tanárok: Gábos Adél, Bognár Jánosné.