Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $A = 1$ vagy pedig $0{,}1 \leq A < 1$. Az első esetben tekintsük a sorozatnak a $10^k - 1$ indexű tagjait ($k = 1, 2, \ldots$). Állítjuk, hogy az így kapott részsorozat határértéke éppen 1. Valóban, $k - 1 < \lg(10^k - 1) < k$ alapján

$$b_k = a_{10^k-1} = \frac{10^k - 1}{10^k} = 1 - \frac{1}{10^k}.$$

Mivel $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{10^k} = 0$, azért $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = 1$, ahogyan állítottuk.

A másik esetben legyen $i_k = [10^k A](k = 1, 2, \ldots)$. A $0{,}1 \leq A < 1$ feltétel miatt $10^{k-1} \leq i_k < 10^k$, tehát $[\lg i_k] + 1 = k$. Így

$$c_k = a_{i_k} = \frac{[10^k A]}{10^k} = A - \frac{10^k A - [10^k A]}{10^k},$$

amiből

$$A - \frac{1}{10^k} < c_k \leq A,$$

hiszen $0 \leq x - [x] < 1$ minden x számra. De $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{10^k} = 0$, azért a „rendőrszabály" értelmében

$$\lim_{k\to\infty} c_k = \lim_{k\to\infty} a_{i_k} = A.$$

Mivel minden A-hoz találtunk megfelelő részsorozatot, a feladat állítását bebizonyítottuk.

Megyesi Gábor (Szeged, Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Gyakorló Iskolája, 8. o. t.)

Megjegyzés. Ha az n szám tízes számrendszerbeli alakja éppen $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k(\alpha_1 \neq 0)$, akkor, mint az könnyen látható, $a_n = 0, \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$. Így az $\{a_n\}$ sorozatban minden olyan véges tizedestört szerepel, amelynek t értékére $0{,}1 \leq t < 1$. A feladat állítása azt mondja ki, hogy az ilyen számok határértékeként minden $0{,}1 \leq A < 1$ valós szám előáll. Tegyük fel, hogy $A \neq 1$, és írjuk fel A-t (végtelen) tizedestört alakban (ha A tizedestört alakja véges volna, írjunk utána 0-kat):

$$(*) \qquad \begin{aligned} A &= 0, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_k\ldots; \quad \text{és legyen} \\ c_k &= 0, \quad \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k \quad (k = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

Ha tudnánk, hogy a $\{c_k\}$ sorozat határértéke A, akkor készen volnánk, hiszen $\{c_n\}$ az $\{a_n\}$ sorozat egy részsorozata. De egy végtelen tizedestört értéke definíció szerint szeleteinek határértéke, és így $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = A$. A probléma nem az, hogy a c_k sorozat konvergens-e, és ha igen, mi a határértéke, hanem az az első pillanatban meghökkentő kérdés: *miért létezik A-nak egyáltalán (végtelen) tizedestört alakja?*

Ennek az alaknak a létezését (és egyértelműségét) a középiskolákban általában bizonyítás nélkül elfogadják (és elfogadjuk mi is). Olvasóinknak melegen ajánljuk, töprengjenek el ennek bizonyításán, mit használnak fel a bizonyítás során a valós számok tulajdonságai közül, s meg tudják-e pontosan fogalmazni, mik is azok a valós számok?