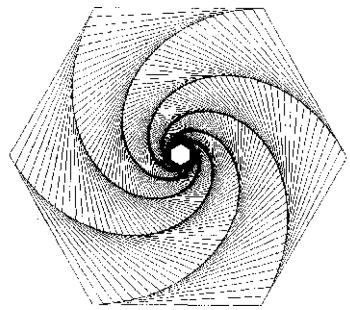
A szófogadó legyek,

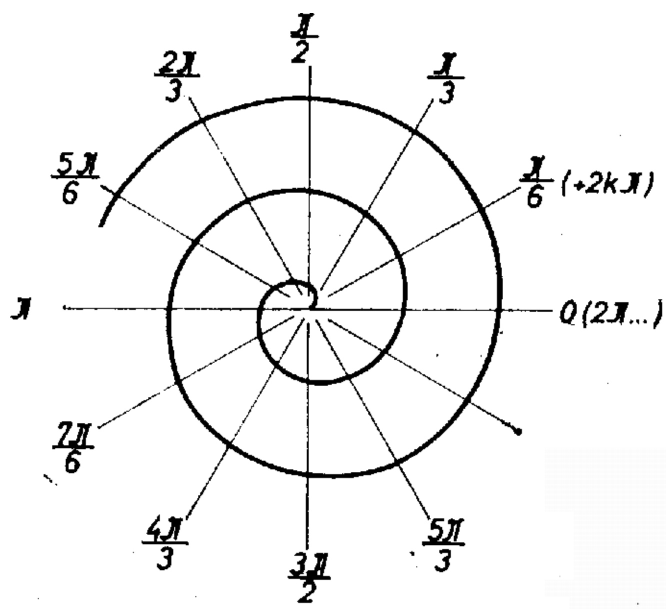
avagy néhány szó a spirálisokról

Hat legyet egy szabályos hatszög csúcsaiba teszünk, és „meghagyjuk” nekik, hogy egyforma, állandó sebességgel haladjanak a jobb oldali szomszédjuk felé. Mennyi idő múlva találkoznak? Hátsó borítónkon a legyek útjának egy részét rajzoltuk fel.



Látjuk, hogy a hatszög középpontját járják körbe, ahhoz egyre közelebb kerülnek és végül a középpontban találkoznak. A találkozásig kétszer akkora utat kell megtenniük, mint amekkora a hatszög egy oldala. Az útvonaluk úgynevezett logaritmikus spirális.

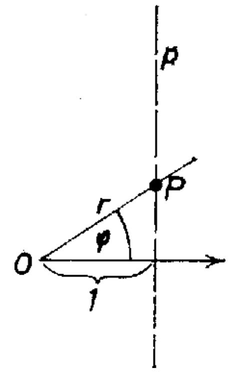
Egy kutató az Északi–sarkról elindul, és egyenesen halad Dél felé. Milyen útvonalon halad? Természetesen egyenesen; ám ez csak akkor igaz, ha a Földdel együtt forogva figyeljük a gyalogost. Ha viszont egy, az Északi–sark fölött lebegő űrhajóból nézzük, és az űrhajó mozdulatlanul áll, azaz nem forog a Földdel együtt, akkor a pályát olyannak látjuk, amilyet az 1. ábra mutat.



1. ábra

Ugyanilyen pályán mozog az a kisegér, amelyik egy forgó korong közepétől annak a széléig szalad. Az útvonal neve archimédeszi spirális.

Ezeknek a spirálisoknak természetesen egyenletük is van, mint ahogyan van egyenlete a körnek, egyenesnek, ellipszisnek is. A szokásos derékszögű koordináta–rendszer nem a legalkalmasabb a spirálisok egyenletének felírására, ezért bevezetünk egy másik koordináta–rendszert, az ún. polárkoordináta–rendszert (poláris=sarki) a következőképpen: az irányított síkban egy O kezdőpontú félegyenest választunk, amelynek irányát kezdőiránynak nevezzük. Egy P pontot most is két adat határoz meg: az O ponttól való távolsága (ezt általában r-rel jelöljük) és az OP félegyenesnek a kezdőiránnyal bezárt irányított szöge (amit φ-vel jelölünk; 2. ábra).

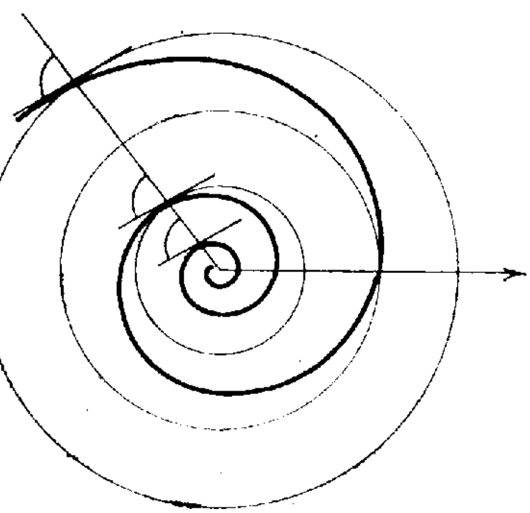


2. ábra

Például az O középpontú, egységsugarú kör egyenlete ebben a koordináta–rendszerben $r = 1$; $s = 1/\cos\varphi$ egyenletű alakzat pedig egy „függőleges” egyenes.

A polárkoordináták bevezetésével a spirálisok egyenletei igen egyszerűen alakulnak. Az archimedeszi spirális egyenlete: $r = a\varphi$, itt a tetszőleges állandót jelöl. Az archimedeszi spirális a legegyszerűbb spirálisok egyike. A logaritmikus spirálisnak (a legyek útvonalának) egyenlete $r = a \cdot e^{b\varphi}$ (a, b állandók, $e = 2{,}71\ldots$) a természetes logaritmus alapszáma). A hátsó borítón található spirálisok egyenlete – amennyiben a hatszög oldalát választjuk egységnyinek – $r = e^{\varphi/\sqrt{3}}$ alakú lesz. Ez a spirális elnevezését is egyenlete után kapta. Érdekes tulajdonsága, hogy minden pontjában az érintő és a pontot az O-val összekötő egyenes ugyanakkora szöget zár be; ez az egyetlen ilyen tulajdonságú síkgörbe. Másik érdekessége, hogy egy rögzített pontjából befelé haladva a görbe végtelen sokszor kerüli meg az O pontot, de ívhossza véges! Mégpedig, ha a pont távolsága O-tól r, akkor az ívhossz: $r/\cos\varphi$. Ha n darab szófogadó legyet egy szabályos n-szög csúcsaiba teszünk, majd elindítjuk őket, a találkozásukig $r/sin\ (\pi/n)$ utat kell megtenniük (r az n-szög köré írható kör sugara), hiszen a legyek olyan logaritmikus spirálison mozognak, amelynek szöge $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{n}$.

A hajósok vagy pilóták, ha nagy távolságot kell megtenniük, igyekeznek olyan útvonalat választani, hogy az út folyamán az iránytű végig ugyanazt az értéket mutassa. Ez azt jelenti (némi elhanyagolással), hogy a délköröket az útvonal állandó szög alatt metszi. És ha az útvonalat a 3. ábra szerinti térképre rajzolják, akkor az útvonal egy logaritmikus spirális egy ívét adja.



3. ábra

(Ezt az útvonalat loxodrómának hívják.)