Igazoljuk, hogy az alábbi egyenlőtlenség teljesül minden x, y, z valós számra, ahol A, B és C egy háromszög szögei:

$$\left(\frac{x+y+z}{2}\right)^2 \geq xy\sin^2 A + yz\sin^2 B + zx\sin^2 C. \tag{1}$$

I. megoldás. A négyzetre emelés elvégzése, és az

$$1-2\sin^2\omega = \cos 2\omega$$

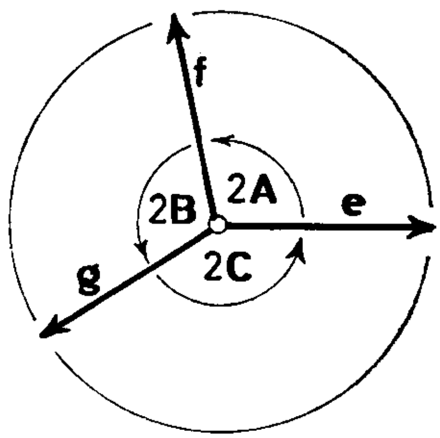
összefüggés felhasználása után (1)-ből a vele ekvivalens

$$x^2+y^2+z^2+2xy\cos 2A+2yz\cos 2B+2zx\cos 2C \geq 0 \tag{2}$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Mivel A, B, C egy háromszög szögei, $2A+2B+2C=360°$. Legyen $\mathbf{e}$ a síkon tetszőleges irányú, egységnyi nagyságú vektor, $\mathbf{e}$-t $2A$ szöggel elforgatva kapjuk $\mathbf{f}$-et, ebből $2B$ szöggel való forgatással kapjuk $\mathbf{g}$-t. Mivel $2A+2B+2C=360°$, $\mathbf{g}$-t újabb, $2C$ szöggel való forgatás visszaviszi $\mathbf{e}$-be. Megmutatjuk, hogy (2) bal oldalán az

$$\mathbf{s} = x\mathbf{e} + y\mathbf{f} + z\mathbf{g}$$

vektor abszolút értékének a négyzete áll, ezzel természetesen (2)-t, és vele együtt (1)-et is bebizonyítjuk.



Válasszuk a koordináta-rendszer origójának a vektorok közös kezdőpontját, és az x tengely pozitív irányának $\mathbf{e}$ irányát. Ekkor $\mathbf{s}$ abszcisszája

$$s_1 = x + y\cos 2A + z\cos 2C,$$

ordinátája pedig

$$s_2 = y\sin 2A - z\sin 2C.$$

E kettő négyzetösszege

$$|s|^2 = s_1^2+s_2^2 = x^2+y^2+z^2+2x(y\cos 2A+z\cos 2C)+$$
$$+2yz(\cos 2A\cos 2C-\sin 2A\sin 2C),$$

ami valóban azonos a (2) bal oldalán álló kifejezéssel, hiszen $\cos 2A\cos 2C - \sin 2A\sin 2C = \cos(2A+2C) = \cos 2B$.

Károlyi Gyula (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. A bizonyítandó egyenlőtlenséget (2) alapján a következő formába írhatjuk:

$$x^2+2x(y\cos 2A+z\cos 2C)+(y^2+z^2+2yz\cos 2B) \geq 0.$$

Ismeretes, hogy az $x^2+2bx+c$ másodfokú polinom értéke pontosan akkor nem negatív x minden értékére, ha diszkriminánsa nem pozitív, azaz ha $4b^2-4c \leq 0$. Esetünkben ez a helyzet, ugyanis $\cos 2B = \cos 2A\cos 2C - \sin 2A\sin 2C$ alapján

$$(y\cos 2A+z\cos 2C)^2-(y^2+z^2+2yz\cos 2B)=$$
$$=-y^2\sin^2 2A-2yz(\cos 2B-\cos 2A\cos 2C)-z^2\sin^2 2C=$$
$$=-(y\sin 2A-z\sin 2C)^2,$$

ahogyan állítottuk.

Megjegyzés. Az I. megoldásban kapott összefüggés a koszinusz-tétel általánosítása. Hasonlóan látható be, hogy ha $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, …, $\mathbf{v}_k$ a sík tetszőleges vektorai, akkor

$$\left|\sum_{i=1}^{k}\mathbf{v}_i\right|^2=\sum_{i=1}^{k}|\mathbf{v}_i|^2+2\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i+1}^{k}|\mathbf{v}_i||\mathbf{v}_j|\cos\omega_{ij},\tag{3}$$

ahol ω_{ij} a $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_j$ vektorok közti szög. Akik tudják, hogy a $|\mathbf{v}_i||\mathbf{v}_j|\cos\omega_{ij}$ mennyiséget a $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{v}_j$ vektorok skaláris szorzatának hívják, és azt is tudják, hogy ez a szorzás is kommutatív, és az összeadásra nézve disztributív, ennek alapján is beláthatják a (3) összefüggést. Sokan a skaláris szorzás tulajdonságai alapján igazolták a feladat állítását, ez a megoldás azonban csak formálisan tér el a fenti I. megoldástól. A lényeges ötlet közös a két megoldásban, és ez az, hogy (2) bal oldalán „teljes négyzet" áll. Mint láttuk, ennek a felismerése nélkül is bizonyítható (2). Általában kérdezhető, hogy mi annak a szükséges és elegendő feltétele, hogy a

$$c_{11}x^2+c_{22}y^2+c_{33}z^2+2c_{12}xy+2c_{23}yz+2c_{13}xz\geq 0\tag{4}$$

egyenlőtlenség tetszőleges x, y, z valós számra teljesüljön. Nyilván szükséges, hogy az

$$c_{11}\geq 0,\quad c_{22}\geq 0,\quad c_{33}\geq 0,\quad c_{11}c_{22}\geq c_{12}^2,\quad c_{22}c_{33}\geq c_{23}^2,\quad c_{11}c_{33}\geq c_{13}^2\tag{5}$$

egyenlőtlenségek teljesülnek. Ha rajtuk kívül még

$$C_{11}C_{22}C_{33}+C_{12}C_{23}C_{31}+C_{13}C_{21}C_{32}-C_{13}C_{22}C_{31}-C_{12}C_{21}C_{33}-C_{11}C_{23}C_{32}\geq 0\tag{6}$$

is teljesül, akkor ez már elégséges is. Esetünkben (5) triviálisan teljesül, (6) belátásához azonban elég sok trigonometrikus átalakításra volna szükség. Aki ismeri a determinánsokat, észreveheti, hogy (6) bal oldalán épp a c_{ij} elemű determináns értéke áll, és a (4) egyenlőtlenség azt jelenti, hogy a determináns által generált kvadratikus alak pozitív szemidefinit.