

I. rész

1. a) Oldjuk meg a $\sqrt{2x+6} = 9-x$ egyenletet a valós számok halmazán. (5 pont)

b) Oldjuk meg a $\log_{0,3} x \geq \log_{0,3} \frac{4}{9}$ egyenlőtlenséget a valós számok halmazán. (3 pont)

c) Oldjuk meg a $\sin^2 4x + \sin 4x + \cos^2 4x = 2$ egyenletet a $[0; \pi]$ halmazon. (4 pont)

Megoldás. a) A négyzetgyökfüggvény értelmezési tartománya miatt $x \geq -3$, értékészlete miatt $x \leq 9$, tehát $-3 \leq x \leq 9$. Négyzetre emelve az egyenlet mindkét oldalát: $2x + 6 = 81 - 18x + x^2$. Az egyenletet rendezve: $x^2 - 20x + 75 = 0$, melynek gyökei: $x_1 = 15$ és $x_2 = 5$.

A $[-3; 9]$ intervallumon ekvivalens átalakításokat végeztünk, így csak $x_2 = 5$ megoldása az egyenletnek.

b) Az egyenlőtlenség értelmezési tartománya: $x > 0$. A 0,3-es alapú logaritmusfüggvény szigorú monoton csökkenése miatt: $x \leq \frac{4}{9}$, melyet az értelmezési tartománnyal összevetve a megoldáshalmaz: $]0; \frac{4}{9}]$.

c) Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $\sin^2 4x + \cos^2 4x = 1$, ezért a megoldandó egyenlet: $\sin 4x = 1$, ahonnan $x = \frac{\pi}{8} + k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Ebből az egyenlet megoldásai a keresett halmazon: $x = \frac{\pi}{8}; \frac{5\pi}{8}$. Ekvivalens átalakításokat végeztünk, ezért ebből következik, hogy a kapott gyökök jók.

2. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az $y + 2x = x^2$ egyenletű parabola.

a) Írjuk fel a parabola $E(2; 0)$ pontjában húzott érintő egyenletét. (3 pont)

b) Számítsuk ki a parabola tengelypontjának koordinátáit és határozzuk meg a parabola paraméterét. (4 pont)

A koordináta-rendszerben a $(-4; 0)$, $(4; 0)$, $(4; 8)$ és $(-4; 8)$ csúcspontokkal megadott téglalapot a fenti parabola három részre vágja.

c) Mekkora a középső rész területe? (6 pont)

Megoldás. a) Az E -ben húzott érintő meredekségét a parabola deriváltfüggvényének az $x = 2$ helyen felvett helyettesítési értéke adja meg. $f'(x) = 2x - 2$, így az érintő meredeksége $f'(2) = 2$.

Az érintő egyenlete: $y = 2x - 4$.

b) Teljes négyzetté alakítással: $y = (x - 1)^2 - 1$, ahonnan a parabola tengelypontja $T(1; -1)$. A parabola paraméterére: $\frac{1}{2p} = 1$, így $p = \frac{1}{2}$.

c) A megadott parabola a téglalapot a $(0; 0)$, $(2; 0)$, $(4; 8)$ és $(-2; 8)$ pontokban metszi. A $[-2; 0]$ intervallumon az x tengely és a parabolaív közötti terület nagysága:

$$\int_{-2}^0 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-2}^0 = - \left(-\frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{20}{3}.$$

A parabola tengelyes szimmetriája miatt a $[-2; 0]$ és a $[2; 4]$ intervallumokon a parabola alatti terület megegyezik, így a középső táblarész területét megkapjuk, ha egy 48 egység területű téglalapból kivonjuk a $[-2; 0]$ és a $[2; 4]$ intervallumhoz tartozó parabola alatti területet. Tehát a keresett terület:

$$T = 48 - 2 \cdot \frac{20}{3} = \frac{104}{3}.$$

3. a) Egy mértani sorozat 1011-edik tagja megegyezik a sorozat nullától különböző hányadosával. Számítsuk ki a sorozat első 2019 tagjának a szorzatát. (6 pont)

b) Jelölje x és y ebben a sorrendben egy mértani sorozat két egymást követő tagját. Tudjuk, hogy $x \neq 0$ és az $(x; y)$ számpár megoldása a

$$100^x - 2 \cdot 10^x \cdot 10^{2y} + 10^{4y} \leq 0$$

egyenlőtlenségnek. Számítsuk ki a sorozat hányadosát. (6 pont)

Megoldás. a) I. megoldás. Jelölje a mértani sorozat hányadosát q ($q \neq 0$). Ekkor a feladat szövege alapján: $a_{1012} = q^2$, $a_{1013} = q^3$, ..., $a_{2019} = q^{1009}$ adódik.

Hasonlóan az indexek csökkentésével: $a_{1010} = 1$, $a_{1009} = \frac{1}{q}$, $a_{1008} = \frac{1}{q^2}$, ..., $a_1 = \frac{1}{q^{1009}}$.

Az előzőeket felhasználva a keresett szorzat:

$$\begin{aligned} & a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_{1009} \cdot a_{1010} \cdot a_{1011} \cdot \dots \cdot a_{2018} \cdot a_{2019} = \\ &= \frac{1}{q^{1009}} \cdot \frac{1}{q^{1008}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{q} \cdot 1 \cdot q \cdot \dots \cdot q^{1008} \cdot q^{1009} = 1. \end{aligned}$$

II. megoldás. Jelölje a mértani sorozat első tagját a_1 , hányadosát q ($q \neq 0$). Ekkor a sorozat tagjait felírva: $a_2 = a_1 \cdot q$, $a_3 = a_1 \cdot q^2$, \dots , $a_{2019} = a_1 \cdot q^{2018}$. Az első 2019 tagot összeszorozva a szorzat értéke:

$$a_1^{2019} \cdot q^{1+2+3+4+\dots+2018} = a_1^{2019} \cdot q^{2037171}.$$

A feladat feltétele szerint: $a_1 \cdot q^{1010} = q$, ahonnan ($q \neq 0$ miatt) $a_1 = \frac{1}{q^{1009}}$. A keresett szorzat:

$$\left(\frac{1}{q^{1009}}\right)^{2019} \cdot q^{2037171} = \frac{1^{2019}}{q^{2037171}} \cdot q^{2037171} = 1.$$

b) Mivel $100^x = (10^x)^2$ és $10^{4y} = (10^{2y})^2$, így $100^x - 2 \cdot 10^x \cdot 10^{2y} + 10^{4y} = (10^x - 10^{2y})^2 \leq 0$. $(10^x - 10^{2y})^2 \leq 0$ pontosan akkor teljesül, ha $10^x - 10^{2y} = 0$, vagyis $10^x = 10^{2y}$, azaz (a 10-es alapú exponenciális függvény szigorú monotonitása miatt) $x = 2y$. (Mivel $x \neq 0$, ezért) $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$.

4. A VONALAZÓ nevű játékot két ember játszhatja.

A játék menete

Egy papírlapra a játékosok néhány pontot rajzolnak. A kezdő játékos húz egy vonalat valamelyik pontból egy másik pontig, és a vonalra egy újabb pontot rajzol. Így ebből az új pontból két vonal indul ki. A két játékos felváltva húzza a vonalakat a pontok között és a játékos a megrajzolt vonalra mindig egy új pontot rajzol a következő szabályok betartásával:

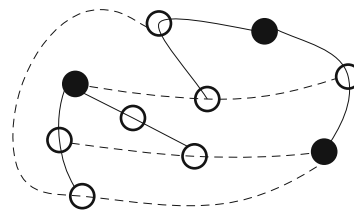
1. Mindegyik vonal alakja tetszőleges lehet, de nem metszheti önmagát és nem metszhet egyetlen korábban megrajzolt vonalat sem.
2. Az összekötő vonal két pontot köt össze és nem mehet át más korábban megrajzolt ponton.
3. Két pontot csak egyetlen vonal köthet össze.
4. Egyetlen pontból sem indulhat ki háromnál több vonal.

Az veszít, aki már nem tud húzni egy vonalat sem.

a) A 4.1. ábrán 3 pont látható. Rajzoljuk bele az ábrába – a fenti feltételek figyelembevételével – annak a játéknak az egyes lépéseit, amelyben pontosan 4 új pont szerepel. A kezdő játékos vonala legyen folytonos, az ellenfél pedig szaggatott. Az új pontokat üres karikával jelölje. (3 pont)



4.1. ábra



4.2. ábra

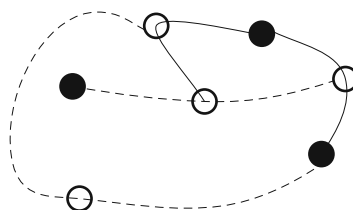
A 4.2. ábrán egy játszma lépéseit lehet nyomon követni. A kezdő játékos vonalait a folytonos, az ellenfél lépéseit pedig a szaggatott vonalak jelzik.

b) Számozzuk be az üres karikával jelzett új pontokat a keletkezésük sorrendjében és döntsük el, melyik játékos nyerte a játszmát. (4 pont)

Levente Csabával már nagyon sokszor játszott a VONALAZÓ nevű játékot. Annak a valószínűsége, hogy Levente 10 játékból legalább 8-at megnyer kétszer akkora, mint annak, hogy pontosan 8-at nyer meg. (Tételezzük fel, hogy Levente mindegyik játszmában ugyanakkora valószínűséggel nyer.)

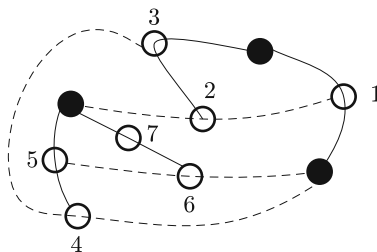
c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Levente megnyer egy játszmát? (7 pont)

Megoldás. a) Egy lehetséges megoldás van a 4.3. ábrán.



4.3. ábra

b) A 4.4. ábrán látható sorrend miatt a kezdő játékos nyerte a játszmát.



4.4. ábra

c) Jelölje p annak a valószínűségét, hogy Levente megnyer egy játszmát. Ekkor annak a valószínűsége, hogy Csaba nyer $1 - p$.

Annak a valószínűsége, hogy Levente 10-ből pontosan 8-szor nyer:

$$\binom{10}{8} \cdot p^8 \cdot (1 - p)^2.$$

Annak a valószínűsége, hogy Levente 10-ből pontosan 9-szer nyer:

$$\binom{10}{9} \cdot p^9 \cdot (1 - p)^1.$$

Annak a valószínűsége, hogy Levente 10-ből pontosan 10-szer nyer:

$$\binom{10}{10} \cdot p^{10} \cdot (1 - p)^0.$$

A feladat szerint:

$$\begin{aligned} & \binom{10}{8} \cdot p^8 \cdot (1 - p)^2 + \binom{10}{9} \cdot p^9 \cdot (1 - p)^1 + \binom{10}{10} \cdot p^{10} \cdot (1 - p)^0 = \\ & = 2 \cdot \binom{10}{8} \cdot p^8 \cdot (1 - p)^2. \end{aligned}$$

Az egyenlet mindkét oldalát elosztva p^8 -nal, és kiszámolva a binomiális együtthatókat:

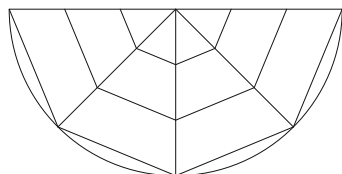
$$45 \cdot (1 - p)^2 + 10p \cdot (1 - p) + p^2 = 90 \cdot (1 - p)^2.$$

Ebből: $54p^2 - 100p + 45 = 0$, melynek gyökei $p_1 \approx 1,081$ és $p_2 \approx 0,771$.

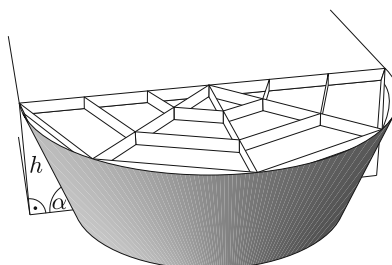
Mivel a valószínűség legfeljebb 1, így Levente kb. 0,771 valószínűséggel nyer meg egy játszmát.

II. rész

5. Egy zöldségárus a friss áruját a pulton félkörívben helyezi el. Az egyes tartományokat falécek határolják. A félkör az 5.1. ábrán látható módon négy egybevágó körcikkre van osztva. Az ábrán látható összes egyenes szakasz és a félkörív is falécből készült. A szomszédos sugarakat összekötő elválasztó lécek párhuzamosak és három egyenlő részre osztják a sugarakat. A félkör sugara 1,5 méter.



5.1. ábra



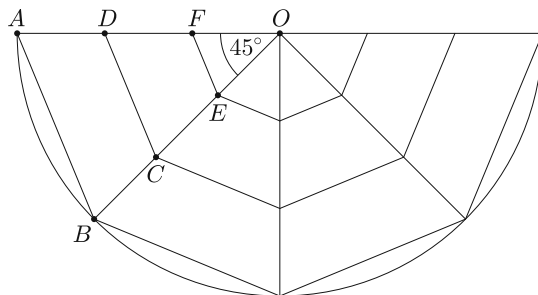
5.2. ábra

a) Hány méter falécre van szükség a pult kialakításához? Válaszunkat egészre kerekítve adjuk meg. (8 pont)

Egy másik zöldségesnek megtetszett az ötlet és bódéjához egy félbevágott csonkakúp alakú bővítmenyt tervezett az ábra szerint, ahol h a bővítmeny magasságát, α pedig a félbevágott csonkakúp bódéval érintkező alkotójának a bódé alsó, vízszintes élével bezárt szögét jelöli. A bővítmeny méretei: $h = 100$ cm, $\alpha = 70^\circ$, a felső kör sugara pedig 1,5 m (5.2. ábra).

b) Mennyi anyag szükséges a szürkével jelölt palástrész beborításához, ha az illesztések miatt plusz 4% anyaggal kell számolni? Válaszunkat tized négyzetméterre kerekítve adjuk meg. (8 pont)

Megoldás. a) Az 5.3. ábrán látható félkörív hossza $1,5 \cdot \pi \approx 4,712$ (m).



5.3. ábra

Mivel a körcikkek egybevágók, ezért az $\angle AOB = 45^\circ$.

Az AB szakasz hosszát koszinusztétellel számolva:

$$AB^2 = 1,5^2 + 1,5^2 - 2 \cdot 1,5 \cdot 1,5 \cdot \cos 45^\circ,$$

ahonnan $AB \approx 1,148$ (m). Az OAB és OFE , valamint az ODC és OFE háromszögek hasonlósága miatt a hasonlóság arányának felhasználásával

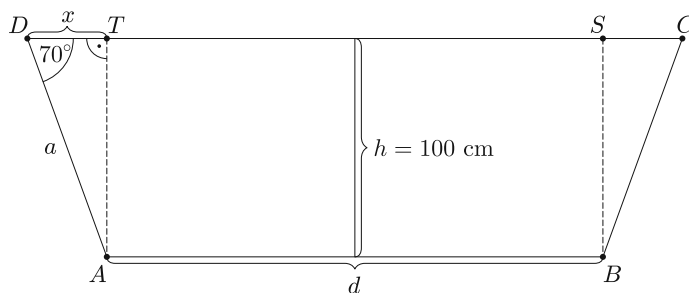
$$CD = \frac{2 \cdot AB}{3} \approx 0,765 \text{ (m)} \quad \text{és} \quad EF = \frac{AB}{3} \approx 0,383 \text{ (m)}.$$

Mindegyik keresztlécből 4 db van, a sugárból pedig öt, így a keresett hosszúság:

$$4,712 + 5 \cdot 1,5 + 4 \cdot (1,148 + 0,765 + 0,383) = 21,396 \text{ (m)}.$$

Tehát 22 méter falécre van szükség.

b) Az 5.4. ábra jelöléseit használva az ATD derékszögű háromszögben: $\operatorname{tg} 70^\circ = \frac{100}{x}$, ahonnan $x \approx 36,40$ (cm), és $\sin 70^\circ = \frac{100}{a}$, melyből $a \approx 106,42$ (cm).



5.4. ábra

Az előbbieket miatt $d = 300 - 2x \approx 227,20$ (cm), így $r = \frac{d}{2} \approx 113,60$ (cm).

A félbevágott csonkakúp alakú palást felszíne:

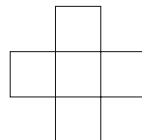
$$A = \frac{(r + R) \cdot a \cdot \pi}{2} \approx 44\,064,5 \text{ (cm}^2\text{)},$$

így a szükséges anyagmennyiség: $4,6 \text{ m}^2$.

6. Egy 8×8 -as sakktábla mezőire 1-től 64-ig beírtuk a természetes számokat a 6.1. ábra szerint. Ezután készítettünk egy olyan alakzatot, amely 5 darab, a sakktábla mezőivel egybevágó négyzetből áll (6.2. ábra). Az így elkészített alakzatot véletlenszerűen ráhelyezzük a sakktáblára úgy, hogy annak mind az öt négyzete lefedjen egy-egy mezőt a táblán.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

6.1. ábra



6.2. ábra

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy a lefedett számok összege osztható 3-mal? (6 pont)

Egy másik alkalommal a sakktábla mezőire 64 pozitív egész számot írtunk. Közülük az egyik egyjegyű, a többi kétjegyű szám. Tudjuk, hogy a felírt számok mediánja és egyetlen módusza a 68, ami kétszer szerepel a táblán. Tudjuk továbbá, hogy a számok átlaga 67,5, a terjedelmük pedig 93.

b) Mely számok szerepelnek a táblán? (10 pont)

Megoldás. a) I. megoldás. A „kereszt” összesen $6 \cdot 6 = 36$ -féleképpen helyezhető rá a sakktáblára (összes eset száma). Ha a bal felső sarokba rakjuk a keresztet, akkor a 2; 9; 10; 11 és 18 számokat fedi le, melyek összege 50, aminek a hármas maradéka 2.

Bárhová is rakjuk le a keresztet (a szabálynak megfelelően), ha eggyel jobbra csúsztatjuk az összeg mindig 5-tel, a hármas maradék pedig 2-vel nő. Ha a keresztet eggyel lefelé csúsztatjuk, akkor az összeg mindig 40-nel, a hármas maradék pedig 1-gyel nő. Az előbbieket miatt a maradékok alapján összesen 12 olyan elhelyezés van, amikor a lefedett számok összege osztható 3-mal (kedvező esetek száma).

Így a keresett valószínűség: $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

II. megoldás. A „kereszt” alakzatot csak a belső négyzetekre tudjuk ráhelyezni. Ezt $6 \cdot 6 = 36$ -féleképpen tudjuk megtenni (összes eset száma).

Ha a lefedett számok közül a középsőt x -szel jelöljük, akkor a tőle balra lévőt $x - 1$, jobbra lévőt $x + 1$, felette lévőt $x - 8$, alatta lévőt $x + 8$ jelöli. Ezek összege $5x$. Az összeg pontosan akkor osztható 3-mal, ha x osztható 3-mal. A 6×6 -os belső négyzetben 12 db 3-mal osztható szám van (kedvező esetek száma).

Így a keresett valószínűség: $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$.

b) Mivel 69; 70; 71; ... ; 99 összesen 31 darab szám, és a módusz valamint a medián is 68, a 64 számot sorbarendevezve a két középső $x_{32} = x_{33} = 68$. A terjedelem miatt $x_1 = 6$. A 64 szám átlaga 67,5, ezért a táblára írt számok összege 4320.

A második 32 szám összege $\frac{68 + 99}{2} \cdot 32 = 2672$. Így

$$s = 6 + x_2 + x_3 + \dots + x_{31} + 68 = 4320 - 2672 = 1648,$$

vagyis $x_2 + x_3 + \dots + x_{31} = 1574$.

A legnagyobb összeg, ami az $x_2; x_3; \dots; x_{31}$ helyén álló számokkal elérhető lenne: $38 + 39 + \dots + 67 = 1575$. Ez csak 1-gyel több a valóságos összegnél, tehát valamelyik számot 1-gyel csökkenteni kell. Ez a szám csak a 38 lehet, különben két módusza lenne az táblára írt számoknak.

A keresett számok tehát: 6; 37; 39; 40; ... ; 67; 68; 68; 69; 70; ... ; 98; 99.

7. Adott a derékszögű koordináta-rendszerben az $A(11; -2)$ és a $B(2; 1)$ pontokat összekötő szakasz, továbbá az $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 20$ egyenletű kör. Az AB szakaszt a koordináta-rendszer origója körül $+90^\circ$ -kal elforgatjuk.

a) Számítsuk ki az AB szakasz hosszát. (4 pont)

Egy r és R sugarú kör kívülről érinti egymást. A körök középpontjain áthaladó egyenes ezeket a köröket az érintési ponton kívül az A és B pontokban metszi. Az egyik közös külső érintő érintési pontjai E és F .

b) Igazoljuk, hogy az $ABEF$ négyszög húrnégyszög. (6 pont)

c) Számítsuk ki a közös külső érintőszakasz hosszát. (6 pont)

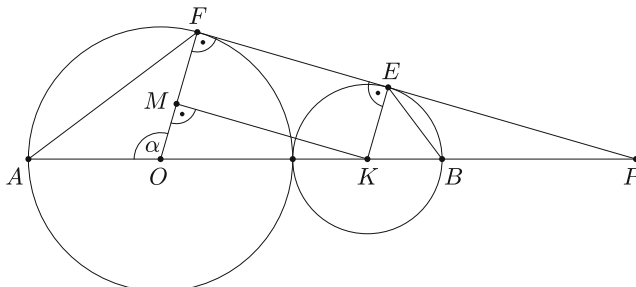
Megoldás. a) I. megoldás. Az A pont elforgatottjának koordinátái $A'(2; 11)$, a B ponté pedig $B'(-1; 2)$. Mivel $36 + 64 = 100 > 20$, ezért A' a kör külső pontja. Mivel $9 + 1 = 10 < 20$, ezért B' a kör belső pontja.

Tehát az $A'B'$ szakasz egy pontban metszi a megadott kört.

II. megoldás. Az A pont elforgatottjának koordinátái $A'(2; 11)$, a B ponté pedig $B'(-1; 2)$, ezért az elforgatott pontokon átmenő egyenes egyenlete $y = 3x + 5$. Az előbbi egyenes metszéspontjai a megadott körrel $P(0; 5)$ és $Q(-2; -1)$.

A metszéspont akkor van az elforgatott szakaszon, ha a pontok koordinátáira teljesül, hogy $-1 < x < 2$ és $2 < y < 11$, ami csak a P pontra igaz, így az $A'B'$ szakasz valóban egy pontban metszi a megadott kört.

b) Az $ABEF$ négyszög akkor húrnégyszög, ha a szemközti szögeinek összege 180° . Az ábra jelöléseit használva legyen az $\angle AOF = \alpha$, ekkor $\angle OAF = \angle OFA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.



Hasonló megfontolással megmutatható, hogy $\angle KBE = \angle BEK = \frac{\alpha}{2}$, így az $ABEF$ négyszög A, B, E és F csúcsánál lévő belső szögek rendre $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$, $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ és $180^\circ - \frac{\alpha}{2}$. A szemközti szögek összege tehát 180° , így a négyszög valóban húrnégyszög.

c) A K pontból párhuzamost húzva az EF közös érintővel a megrajzolt szakasz és OF metszéspontja legyen M . Ekkor az OMK derékszögű háromszögben

$$MK^2 = EF^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2,$$

ahonnan $EF = 2\sqrt{Rr}$.

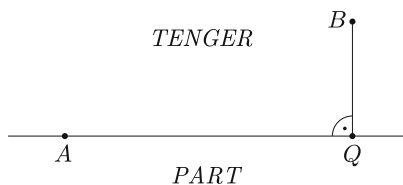
8. Egy szabadulósobának három bejárata van. Egy 6 fős társaság tagjai bármelyik ajtón, de csak kettesével léphetnek be. A belépés sorrendje nem számít.

a) Hányféle módon juthatnak be a szobába a társaság tagjai? (4 pont)

A szabadulósoba egyik feladata így szólt: adott tíz látszólag egyforma lakat illetve tíz kulcs. Mindegyik lakatra igaz, hogy pontosan egy kulcs nyitja. A játékszabály szerint a játékosnak mind a 10 lakatot ki kell nyitnia. Nevezzük próbálkozásnak egy kulcs és egy lakat összeillesztését, akár nyitja a kulcs a lakatot, akár nem.

b) Módszeresen dolgozva legfeljebb hány próbálkozás kell a feladat megoldásához? (3 pont)

Egy „túlélő” műsorban az egyik feladat az volt, hogy a lehető leggyorsabban jussanak el a versenyzők a tengerparton lévő A pontból a tengeren lévő B pontba, mert akkor védettséget szereznek a következő megmérettetésre. Tudjuk, hogy a parton csak futhatnak, a tengerben csak úszhatnak, segédeszközöket (farönkök, evező stb.) nem használhatnak. Az ábra szerint a pálya méretei: $AQ = 4$ km, $BQ = 1$ km, valamint $\angle AQB = 90^\circ$. (A partvonalat az egyszerűség kedvéért tekintjük egyenesnek.) Az egyik versenyző 8 km/óra sebességgel képes futni a homokban és 2 km/óra sebességgel úszni a tengerben.



c) Hány km futás után ugorjon a versenyző a tengerbe, ha a lehető legrövidebb időn belül szeretne eljutni A -ból B -be? (9 pont)

Megoldás. a) A 6 fős társaság tagjai közül a három pár $\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{2} (= 90)$ -féleképpen választható ki úgy, hogy azok sorrendje is figyelembe van véve. Mivel egy adott 3 pár ebben éppen $3! (= 6)$ -szor szerepel, így összesen $90 : 6 = 15$ -féleképpen választható ki a 3 pár. Ezek bármelyike a 3 ajtón $3^3 = 27$ -féleképpen mehet be, tehát a keresett sorrendek száma $15 \cdot 27 = 405$.

b) Az első lakat kulcsa legfeljebb 9 próbálkozással, a másodiké legfeljebb 8, a harmadiké legfeljebb 7, és így tovább, a kilencedik lakaté 1 próbálkozás után megtalálható. A tizediknél már nem kell próbálkozni, mert a megmaradt kulcs ahhoz tartozik. Tehát legfeljebb

$$9 + 8 + 7 + 6 + \dots + 2 + 1 = 45$$

próbálkozással megoldható a feladat.

c) *I. megoldás.* Jelölje U azt a pontot, ahol a versenyzőnek a vízbe kell vetnie magát (8.1. ábra). Ekkor az $UQ = x$ jelöléssel a BUQ derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $BU = \sqrt{x^2 + 1}$. Az út megtételéhez szükséges idő:

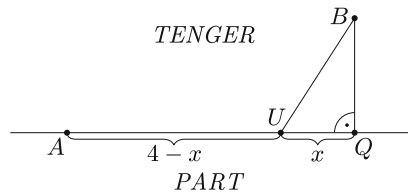
$$t(x) = \frac{4-x}{8} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{2}, \quad \text{ahol } 0 \leq x \leq 4.$$

A $t(x)$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol $t'(x) = 0$.

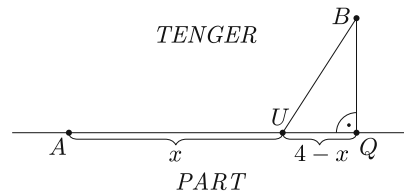
$$t'(x) = -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x, \quad \text{ebből } \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{8},$$

ahonnan $60x^2 - 4 = 0$, melynek gyökei $x_1 \approx 0,258$ és $x_2 \approx -0,258$ (m). ($x_2 \approx -0,258$ nem lehetséges, $x_1 \approx 0,258$ megfelel.) Az x_1 helyen a t' függvény negatívból pozitívba megy át, ezért itt t -nek minimuma van.

Tehát a versenyzőnek kb. 3,742 km-t kell futnia, mielőtt a tengerbe veti magát.



8.1. ábra



8.2. ábra

II. megoldás. Jelölje U azt a pontot, ahol a versenyzőnek a vízbe kell vetnie magát (8.2. ábra). Ekkor az $UQ = 4-x$ jelöléssel a BUQ derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján:

$$BU = \sqrt{x^2 - 8x + 17}.$$

Az út megtételéhez szükséges idő:

$$t(x) = \frac{x}{8} + \frac{\sqrt{x^2 - 8x + 17}}{2}, \quad \text{ahol } 0 \leq x \leq 4.$$

A $t(x)$ függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol $t'(x) = 0$.

$$t'(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2 - 8x + 17)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x - 8), \quad \text{ebből}$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 17} + 4x - 16}{8\sqrt{x^2 - 8x + 17}} = 0,$$

ahonnan $15x^2 - 120x + 239 = 0$, melynek gyökei $x_1 \approx 4,258$ és $x_2 \approx 3,742$ (m). ($x_1 \approx 4,258$ nem lehetséges, $x_2 \approx 3,742$ megfelel.) Az $x_2 \approx 3,742$ helyen a t' függvény negatívból pozitívba megy át, ezért itt t -nek minimuma van.

Tehát a versenyzőnek kb. 3,742 km-t kell futnia, mielőtt a tengerbe veti magát.

9. Egy öttagú család (apa, anya és a három gyerek) életkorának összege ebben az évben 100 év. Az anya 6 évvel fiatalabb a férjénél. 6 év múlva a középső gyerek kétszerannyi idős lesz, mint most. Amikor a legkisebb gyerek született, abban az évben (a kicsi megszületése előtt) a négytagú család átlagéletkora 22,5 év volt. Az anya az első gyermekét 22 éves korában szülte.

a) Hány éves most az anyuka? (7 pont)

Vasárnap délután a családtagok egy új társasjátékot próbálnak ki. A társasjáték játéktábláján 100 mező kapcsolódik egymás után, melyeket a tervezők 1-től 100-ig megszámoztak. A táblán a második mezőtől kezdve minden 2. mező zöld színű (a többi fehér), a harmadik mezőtől kezdve minden 3. mezőn egy állat képe, a negyedik mezőtől kezdve minden 4. mezőn egy fa képe, és az ötödik mezőtől kezdve minden 5. mezőn egy vadászház képe látható. A játékszabály szerint, ha egy mezőn két figura szerepel, akkor az erre a mezőre lépő játékos egyszer kimarad a játékból.

b) Hány olyan fehér színű mező van a táblán, amelyre lépve a játékos egyszer kimarad a játékból? (3 pont)

A társasjáték játékszabálya szerint a játékosok egy fehér és egy sárga színű szabályos dobókockával dobnak egyszerre, és a lépésük száma a dobott számok összege. Ha a dobás összege 6, akkor a játékosok újra dobhatnak, és a lépések száma a játékos által dobott négy szám összege lesz. (Például: Ha a játékos első dobása 2 és 5 volt, akkor a 7-es mezőre lép. Ha viszont a játékos első dobása 2 és 4, az új dobása 3 és 5 volt, akkor a játékos a 14-es mezőre léphet.) Ha egy mező sorszámát 10-zel osztható, akkor erre rálépve, a játékos a bábujaival visszalép a legközelebbi, fát ábrázoló mezőre.

c) Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első játékos bábuja kezdéskor a 10-es mezőre lép? (Kezéskor a játékosok bábuai az 1-es mező előtt állnak.) (6 pont)

Megoldás. a) Jelölje az apa életkorát most x , a középső gyereket y . Ekkor a szöveg alapján az anya $x-6$, a középső gyerek pedig az $y+6=2y$ egyenletből 6 éves.

A legkisebb gyerek születésének évében a két nagyobb gyerek és a két szülő életkorának összege $22,5 \cdot 4 = 90$ év. A legkisebb gyerek születése óta az öttagú család életkorának összege 10 évvel nőtt, tehát a legkisebb gyerek most 2 éves.

Ha az anya most $x-6$ éves, akkor a legidősebb gyerek $x-6-22 = x-28$ éves. Mivel az életkorok összege 100 év, ezért $2+6+(x-28)+x+(x-6) = 100$, ahonnan $x = 42$, így az anyuka 36 éves.

b) 1-től 100-ig a 3 és az 5 páratlan közös többszörőseit keressük. Mivel $[3; 5] = 15$, így a 15., 45. és 75. mező ilyen, azaz a keresett mezők száma 3.

c) A játékos csak úgy léphet a 10-es mezőre, ha az első két dobás összege 10, vagy az első két dobás összege 6 és az utána következő két dobás összege 4.

Az első két dobás összege úgy lehet 10, ha a játékos a (4;6), (6;4), vagy (5;5) párosítások valamelyikét dobja. Ennek a valószínűsége $\frac{3}{36}$.

Az első két dobás összege úgy lehet 6, ha a játékos az (1;5), (5;1), (2;4), (4;2) vagy (3;3) párosítások valamelyikét dobja. Ennek a valószínűsége $\frac{5}{36}$.

Az első két dobást követő dobás összege úgy lehet 4, ha a játékos az (1;3), (3;1) vagy (2;2) párosítások valamelyikét dobja. Ennek a valószínűsége $\frac{3}{36}$.

(A két egymás utáni dobás egymástól független esemény), így ennek a valószínűsége $\frac{5}{36} \cdot \frac{3}{36}$. A keresett valószínűség:

$$\frac{3}{36} + \frac{5}{36} \cdot \frac{3}{36} = \frac{41}{432} \approx 0,095.$$