

I. rész

1. a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^2 - 14 = 2\sqrt{x^2 + 1}. \quad (6 \text{ pont})$$

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2y}{2x^2 + y} &= \frac{1}{2}, \\ \frac{12x^2y}{4x^2 + 3y} &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

(7 pont)

Megoldás. a) A gyökjel alatti mennyiség mindig pozitív. Az egyenlet bal oldala nem lehet negatív, azaz

$$x^2 - 14 \geq 0; \quad x^2 \geq 14.$$

Vezessünk be új ismeretlent, azaz legyen

$$a = \sqrt{x^2 + 1} \quad (\geq 0).$$

Ekkor az egyenletünk az

$$x^2 + 1 - 15 = a^2 - 15 = 2a, \quad a^2 - 2a - 15 = 0$$

alakot veszi fel. Ennek megoldásai $a_1 = 5$, $a_2 = -3$. Ebből csak az a_1 jöhet számításba az előjel miatt, azaz

$$a_1 = 5 = \sqrt{x^2 + 1}, \quad 25 = x^2 + 1, \quad x^2 = 24, \quad x = \pm\sqrt{24} = \pm 2\sqrt{6}.$$

A kapott gyököket az ellenőrzés jónak találja.

b) Ha $x = 0$ lenne, akkor az egyenletek bal oldalán nulla állna, míg jobb oldalán nem, tehát $x \neq 0$. Ugyanezen gondolat alapján kapjuk, hogy $y \neq 0$. A megoldhatóság feltétele, hogy $2x^2 + y \neq 0$ és $4x^2 + 3y \neq 0$ legyen. Vegyük az egyenletek reciprokait – az előzőek alapján megtehetjük – és rendezzük:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 + y}{2x^2y} &= 2, & \frac{4x^2 + 3y}{12x^2y} &= 5, \\ \frac{2x^2}{2x^2y} + \frac{y}{2x^2y} &= 2, & \frac{4x^2}{12x^2y} + \frac{3y}{12x^2y} &= 5, \\ \frac{1}{y} + \frac{1}{2x^2} &= 2. & \frac{1}{3y} + \frac{1}{4x^2} &= 5. \end{aligned}$$

Vezessünk be új ismeretleneket:

$$a = \frac{1}{x^2}, \quad b = \frac{1}{y}.$$

Az egyenletrendszer az

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + b = 2 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 4 \\ 3a + 4b = 60 \end{cases}$$

alakot nyeri el. Itt a második egyenletből az első kétszeresét levonva kapjuk, hogy $a = 52$ és $b = -24$; azaz

$$\begin{aligned} a = 52 = \frac{1}{x^2}, \quad x^2 = \frac{1}{52}, & \quad b = -24 = \frac{1}{y}, \quad y = -\frac{1}{24}, \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{52}} = \pm \frac{1}{2\sqrt{13}}. & \end{aligned}$$

A kapott gyökök $(\frac{1}{2\sqrt{13}}; -\frac{1}{24})$ és $(-\frac{1}{2\sqrt{13}}; -\frac{1}{24})$, az ellenőrzés mindkettőt jónak találja.

2. a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$4^x + 4 \cdot 2^{-x} = 5. \quad (6 \text{ pont})$$

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = -2 + 3 \cos 2x. \quad (7 \text{ pont})$$

Megoldás. a) Vezessünk be új ismeretlent, legyen $2^x = a$ (> 0). Így

$$\begin{aligned} a^2 + \frac{4}{a} = 5, & \quad a^3 - 5a + 4 = 0, & \quad a^3 - 1 - 5a + 5 = 0, \\ (a-1)(a^2 + a + 1) - 5(a-1) = 0, & \quad (a-1)(a^2 + a - 4) = 0. \end{aligned}$$

Egy szorzat akkor és csak akkor nulla, ha valamelyik tényezője nulla, azaz

$$\begin{aligned} a-1 = 0, & \quad a^2 + a - 4 = 0, \\ a_1 = 1, & \quad a_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \\ & \quad a_3 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} (< 0), \\ 2^x = 1, & \quad 2^x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \\ x_1 = 0, & \quad x_2 = \log_2 \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}. \end{aligned}$$

a_3 nem ad megoldást, mivel negatív.

A kapott gyököket az ellenőrzés jónak találja.

b) Használjuk fel, hogy $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ és $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$ igaz minden valós számra:

$$\begin{aligned} (1 - \cos^2 x)^3 + \cos^6 x &= -2 + 3(2 \cos^2 x - 1), \\ 1 - 3 \cos^2 x + 3 \cos^4 x - \cos^6 x + \cos^6 x &= -2 + 6 \cos^2 x - 3, \\ 3 \cos^4 x - 9 \cos^2 x + 6 &= 0, \\ \cos^4 x - 3 \cos^2 x + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Vezessünk be új ismeretlent, azaz $a = \cos^2 x$, ekkor egyenletünk az

$$a^2 - 3a + 2 = 0$$

alakot veszi fel, aminek a gyökei: $a_1 = 2$ és $a_2 = 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} a_1 = 2 = \cos^2 x, & \quad a_2 = 1 = \cos^2 x, \\ \cos x = \pm \sqrt{2}, & \quad \cos x = \pm 1, \\ \text{ami nem lehetséges,} & \quad x = k\pi; \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

A kapott gyököket az ellenőrzés jónak találja.

3. a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$1 + \frac{3}{\log_4(x^2 - 6x + 13)} = \frac{4}{\log_2(x+1)} + \frac{\log_2(x+1)^2}{2}. \quad (8 \text{ pont})$$

b) Egy szabályos dobókockát hatvanszor feldobva 15 esetben kaptunk hatost. Ezt a kísérletet egymás után többször elvégezve mindig ehhez hasonló eredményre jutunk. Emiatt úgy sejtjük, hogy a dobókocka „cinkelt”, azaz a hatos megnövelt valószínűséggel bír. Mekkora ez a valószínűség, ha minden 60-as sorozat esetén 15 lett a kapott érték (azaz a várható érték 15)? (4 pont)

Megoldás. a) Az egyenlet értelmezési tartományát vizsgálva:

$$\begin{aligned} \log_4(x^2 - 6x + 13) \neq 0, & \quad x^2 - 6x + 13 > 0, & \quad \log_2(x+1) \neq 0, & \quad x+1 > 0, \\ x^2 - 6x + 12 \neq 0, & \quad (x-3)^2 + 4 > 0, & \quad x \neq 0, & \quad x > -1, \\ (x-3)^2 + 3 \neq 0. & & & \end{aligned}$$

Összefoglalva: $-1 < x$ és $x \neq 0$.

I. eset: $-1 < x < 0$. Ekkor az egyenlet jobb oldala negatív, hiszen $x < 0$ esetén $\log_2(x+1) < 0$, és így

$$\begin{aligned} \frac{4}{\log_2(x+1)} + \frac{\log_2(x+1)^2}{2} &= \frac{4}{\log_2(x+1)} + \frac{2\log_2(x+1)}{2} = \\ &= \frac{4}{\log_2(x+1)} + \log_2(x+1) = \log_2(x+1) \left(\frac{4}{\log_2^2(x+1)} + 1 \right) \end{aligned}$$

is negatív.

A bal oldal pozitív, hiszen

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 13 &= (x-3)^2 + 4 \geq 4, \\ \log_4(x^2 - 6x + 13) &\geq \log_4 4 = 1, \\ 1 + \frac{3}{\log_4(x^2 - 6x + 13)} &> 1. \end{aligned}$$

Ebben az intervallumban tehát nincs megoldás.

II. eset: $0 < x$. Az egyenlet bal oldalának értékészletét vizsgálva:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 13 &= (x-3)^2 + 4 \geq 4, \\ \log_4(x^2 - 6x + 13) &\geq 1, \\ \frac{1}{\log_4(x^2 - 6x + 13)} &\leq 1, \\ 1 + \frac{3}{\log_4(x^2 - 6x + 13)} &\leq 4. \end{aligned}$$

Az egyenlet jobb oldalát vizsgálva, közben használva egy számtani-mértani közép közti egyenlőtlenséget a pozitív $\log_2(x+1)$ kifejezésre:

$$\begin{aligned} \frac{4}{\log_2(x+1)} + \frac{\log_2(x+1)^2}{2} &= \\ = \frac{4}{\log_2(x+1)} + \log_2(x+1) &\geq 2\sqrt{\frac{4}{\log_2(x+1)} \cdot \log_2(x+1)} = 2\sqrt{4} = 4, \end{aligned}$$

azaz

$$\frac{4}{\log_2(x+1)} + \frac{\log_2(x+1)^2}{2} \geq 4.$$

Kaptuk, hogy az egyenlet bal oldala 4 vagy kisebb, a jobb oldala 4 vagy nagyobb. Egyenlőség akkor és csak akkor lehet, ha mind a két oldal 4, ekkor

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 13 &= (x-3)^2 + 4 = 4, & \frac{4}{\log_2(x+1)} &= \log_2(x+1), \\ (x-3)^2 &= 0, & \log_2^2(x+1) &= 4, \\ x_1 &= 3, & \log_2(x+1) &= \pm 2, \\ & & x_2 = 3, x_3 &= -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Mindkét követelmény csak az $x = 3$ esetén teljesül, így ez az egyenlet megoldása.

A kapott gyököket az ellenőrzés jónak találja.

b) Legyen p annak a valószínűsége, hogy hatost dobunk, ekkor a többi dobásra $1-p$ adódik. Annak a valószínűsége, hogy 60 dobásból 15 esetben kapunk hatost:

$$P(15 \text{ a } 60\text{-ból}) = \binom{60}{15} p^{15} (1-p)^{45}.$$

Tekinthetjük ezt egy binomiális eloszlásnak.

A várható érték np , ami az adott esetben $60 \cdot p = 15$, $p = \frac{1}{4}$. Ez az elvi $\frac{1}{6}$ értéktől erős eltérést mutat. Mindenképpen igazolja a gyanút, hogy „cinkelt” a kocka.

4. a) Egy nem állandó számtani sorozat első, második és negyedik eleméhez rendre 1-et adunk, így egy mértani sorozat második, harmadik és negyedik elemét kapjuk. A mértani sorozat első, második és harmadik elemének az összege 7. Mennyi a számtani sorozat 1010-edik eleme? (6 pont)

b) Adott a következő sorozat:

$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1 \quad (n \geq 1).$$

Adjuk meg a sorozat 2020-adik tagját.

(7 pont)

Megoldás. a) Jelöljük a számtani sorozat első elemét a -val és a differenciáját d -vel. Ekkor az első négy eleme rendre $a_1 = a$; $a_2 = a + d$; $a_3 = a + 2d$; $a_4 = a + 3d$. Az első, második és negyedik elemhez 1-et adva egy mértani sorozat egymás utáni három elemét kapjuk, amelyekre igaz, hogy a középső elem négyzete a két szélső szorzata, azaz:

$$\begin{aligned} (a + d + 1)^2 &= (a + 1)(a + 3d + 1), \\ a^2 + d^2 + 1 + 2a + 2d + 2ad &= a^2 + 2a + 1 + 3ad + 3d, \\ d^2 - ad - d &= 0, \\ d(d - a - 1) &= 0. \end{aligned}$$

Mivel a sorozat nem állandó, ezért $d \neq 0$, így $d = a + 1$. A számtani sorozat: $a_1 = a$; $a_2 = a + d = 2a + 1$; $a_3 = 3a + 2$; $a_4 = 4a + 3$. Az elemekhez egyet hozzáadva:

$$a_1 = a + 1; \quad a_2 = 2a + 2; \quad a_3 = 3a + 3; \quad a_4 = 4a + 4.$$

Ezek közül az első, második és negyedik tényleg egy mértani sorozat elemei, melynek a hányadosa $q = 2$.

Az első, második és harmadik elem összege 7 a feladat szerint, tehát

$$\frac{a+1}{2} + (a+1) + 2(a+1) = 7, \quad (a+1) \cdot \frac{7}{2} = 7, \quad a = 1.$$

Ekkor $d = 2$, a kezdeti számtani sorozat 1; 3; 5; 7. Az elemekhez egyet adva a 2; 4; 6; 8 számokat kapjuk és a 2; 4; 8 tényleg egy mértani sorozat elemei. A 2 előtti elem 1, és az első három összege $1 + 2 + 4 = 7$.

A számtani sorozat 1010-edik eleme: $a_{1010} = 1 + 1009 \cdot 2 = 2019$.

b) I. megoldás. Az elemeket kiszámolva kapjuk, hogy $a_1 = 1$; $a_2 = 4$; $a_3 = 13$; $a_4 = 40$; $a_5 = 121$. Azt vehetjük észre, hogy ha a sorozat elemeit megszorozzuk 2-vel:

$$2 \cdot a_1 = 2; \quad 2 \cdot a_2 = 8; \quad 2 \cdot a_3 = 26; \quad 2 \cdot a_4 = 80; \quad 2 \cdot a_5 = 242,$$

akkor mindig egy három hatványnál eggyel kisebb számot kapunk. Tehát az a sejtés, hogy $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$. Alkalmazva a képzési szabályt:

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1 = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{2} + 1 = \frac{3^{n+1} - 3}{2} + 1 = \frac{3^{n+1} - 1}{2},$$

azaz igaz volt sejtésünk. Így a keresett elem:

$$a_{2020} = \frac{3^{2020} - 1}{2}.$$

II. megoldás. Alakítsuk át az összefüggést:

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1, \quad a_{n+1} + \frac{1}{2} = 3 \cdot a_n + \frac{3}{2}, \quad a_{n+1} + \frac{1}{2} = 3 \cdot \left(a_n + \frac{1}{2} \right).$$

Ezt felírva n -től 2-ig:

$$\begin{aligned} a_n + \frac{1}{2} &= 3 \cdot \left(a_{n-1} + \frac{1}{2} \right), & a_{n-1} + \frac{1}{2} &= 3 \cdot \left(a_{n-2} + \frac{1}{2} \right), \\ a_{n-2} + \frac{1}{2} &= 3 \cdot \left(a_{n-3} + \frac{1}{2} \right), & \dots & & a_2 + \frac{1}{2} &= 3 \cdot \left(a_1 + \frac{1}{2} \right), \end{aligned}$$

majd összeszorozva

$$a_n + \frac{1}{2} = 3^{n-1} \cdot \left(a_1 + \frac{1}{2} \right) = 3^{n-1} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \cdot 3^n, \quad a_n = \frac{3^n - 1}{2},$$

és innen

$$a_{2020} = \frac{3^{2020} - 1}{2}.$$

III. megoldás (vázlat/ötlet). Az elemeket kiszámolva $a_1 = 1$; $a_2 = 4$; $a_3 = 13$; $a_4 = 40$; $a_5 = 121$. Észrevehető, hogy a sorozat elemeinek különbsége

$$a_2 - a_1 = 3; \quad a_3 - a_2 = 9; \quad a_4 - a_3 = 27; \quad a_5 - a_4 = 81,$$

vagyis minden különbség az előző különbség háromszorosa, ami adódik az

$$\begin{cases} a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 1 \\ a_{n-1} = 3 \cdot a_{n-2} + 1 \end{cases} \Rightarrow a_n - a_{n-1} = 3a_{n-1} - 3a_{n-2} = 3(a_{n-1} - a_{n-2})$$

átalakításból is. Innen az elemek:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, & a_2 &= 1 + 3, & a_3 &= 1 + 3 + 3^2, & a_4 &= 1 + 3 + 3^2 + 3^3, & \dots \\ a_n &= 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^{n-1}, \end{aligned}$$

és adódik a zárt alak.

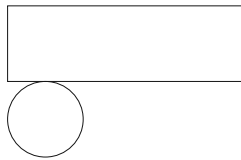
II. rész

5. a) Legyen a és b nemnegatív valós szám. Bizonyítsuk be, hogy

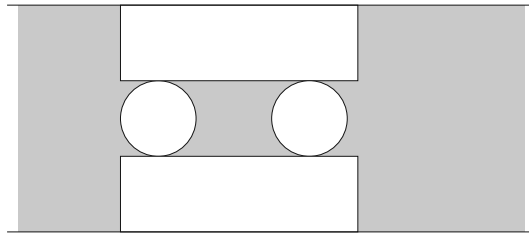
$$0 \leq \frac{(a+1)(b+1)}{a^2+b^2+2} \leq 1.$$

Írhatunk-e a nulla helyett nála nagyobb számot? (9 pont)

b) Egy felül nyitott fémdobozt lemezből állítunk elő úgy, hogy az 1. ábrán látható módon kivágunk, majd összehajtogatunk egy ilyen alakot.



1. ábra



2. ábra

A kivágást egy 30 cm-es széles fémszalagból végezzük úgy, hogy 2 ilyen mintát fordítunk egymással szembe a 2. ábra szerint. Hogyan válasszuk meg a méreteket, hogy a kikerülő fémdoboz a lehető legnagyobb térfogatú legyen? (7 pont)

Megoldás. a) A nevező biztosan pozitív, hiszen $a^2 + b^2 + 2 \geq 2 > 0$. Nézzük a dupla egyenlőtlenség bal oldalát. A vizsgálandó kifejezés számlálója és nevezője is pozitív, így maga a tört is.

Legyen a kicsi és $b = n$ nagy szám. Ekkor

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{(a+1)(b+1)}{a^2+b^2+2} &= \frac{(a+1)(n+1)}{a^2+n^2+2} < \frac{2 \cdot (n+1)}{n^2-1} = \frac{2(n+1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{2}{n-1}, \\ \frac{(a+1)(b+1)}{a^2+b^2+2} &< \frac{2}{b-1}, & 0 \leq \frac{(a+1)(b+1)}{a^2+b^2+2} &< \frac{2}{b-1}, \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy a tört akármilyen kicsi tud lenni, így a bal oldalon nem lehet nulla helyett nagyobb számot írni. Egyenlőség semmilyen a, b érték esetén nem teljesül.

Rendezzük az egyenlőtlenség jobb oldalát:

$$\begin{aligned} \frac{(a+1)(b+1)}{a^2+b^2+2} &\leq 1, \\ (a+1)(b+1) &\leq a^2+b^2+2, \\ ab+a+b+1 &\leq a^2+b^2+2, \\ ab+a+b &\leq a^2+b^2+1, \\ 2a+2b+2ab &\leq 2a^2+2b^2+2, \\ 0 &\leq a^2-2a+1+b^2-2b+1+a^2-2ab+b^2, \\ 0 &\leq (a-1)^2+(b-1)^2+(a-b)^2. \end{aligned}$$

Az utolsó sor biztosan igaz, hiszen három szám négyzetének összege nem lehet negatív. Mivel a lépések megfordíthatóak, ezért az eredeti egyenlőtlenség is igaz.

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha egyidejűleg mind a három négyzetszám nulla, azaz $a = b = 1$.

b) Legyen a kivágandó körlemez sugara r , ekkor a fémdoboz magassága

$$m = \frac{30 - 2r}{2} = 15 - r$$

lesz. A térfogata $V = r^2 m \pi = r^2(15 - r)\pi$, ahol $0 \leq r \leq 15$.

Tekintsük az $f: [0; 15] \rightarrow \mathbb{R}; x \mapsto x^2(15 - x)$ függvényt. Ennek keressük a maximumát. Egy zárt intervallumon folytonos függvénynek van szélsőértéke. Mivel $f(0) = f(15) = 0$, ezért a maximumát az intervallum belső pontjában veszi fel.

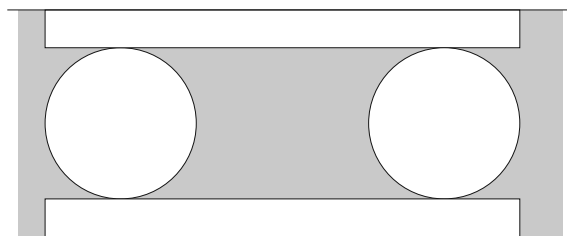
$$\begin{aligned} f(x) &= x^2(15 - x) = 15x^2 - x^3, \\ f'(x) &= 30x - 3x^2, \\ f''(x) &= 30 - 6x. \end{aligned}$$

Ott lehet maximuma, ahol $f'(x) = 0$ és $f''(x) < 0$.

$$f'(x) = 30x - 3x^2 = 3x(10 - x) = 0.$$

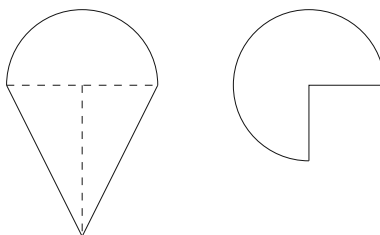
Csak az $x = 10$ jöhet szóba, ekkor $f''(10) = 30 - 6 \cdot 10 = -30 < 0$; azaz $x = 10$ -ben tényleg maximuma van a függvénynek, a maximális értéke $f(10) = 10^2(15 - 10) = 500$. Kaptuk, hogy $V = r^2(15 - r)\pi \leq 500\pi$ és a maximuma $r = 10$ esetén lesz, a térfogata ekkor $500\pi \text{ cm}^3$.

A méretarányos rajz ezek szerint:



6. a) Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, mely egyidejűleg érinti az $y = x^2$ és $y = -x^2 + 4x - 2$ parabolákat. (9 pont)

b) A magyar GúgLi Kft. egy emblémát tervez a székházuk elé, amely egy félbevágott gömb és egy kúp összetételéből áll. Az emblémának függőlegesen a negyede ki van vágva úgy, hogy a két vágószík az embléma függőleges tengelye mentén metszi egymást. Az embléma keresztmetszete és a függőleges metszete az ábrán látható.



A kúp magassága éppen a félbevágott gömb sugarának a kétszerese. Betonból szeretnék elkészíttetni majd lefesteni a 1,5 m magasságúra tervezett emblémát.

– Mennyi beton szükséges az elkészítéséhez, ha az elkészítés folyamán 15% veszteséggel számolhatunk?

– Mekkora lesz az elkészült embléma tömege?

– Hány m^2 -re elegendő festéket kell beszerezniük, ha az időjárás ellen háromszor szeretnék lefesteni és a festés során keletkező veszteség 5%? (7 pont)

Megoldás. a) I. megoldás. Határozzuk meg egy a pontban az $y = x^2$ érintőjét. Az érintő meredeksége: $y' = 2x$; $m = 2a$. Ez átmegy az $(a; a^2)$ ponton, így az érintő: $y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2$. Ezen egyenesnek és az $y = -x^2 + 4x - 2$ parabolának 1 metszéspontja (érintési pont) van. Keressük ezt meg, azaz oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{cases} y = 2ax - a^2, \\ y = -x^2 + 4x - 2. \end{cases}$$

$$2ax - a^2 = -x^2 + 4x - 2,$$

$$x^2 + (2a - 4)x - (a^2 - 2) = 0.$$

Mivel az egyenes érintő, ennek a másodfokú egyenletnek csak egy valós szám lehet a megoldása, tehát a diszkriminánsa nulla:

$$0 = D = (2a - 4)^2 + 4(a^2 - 2) = 8a^2 - 16a + 8 = 8(a - 1)^2,$$

vagyis $a = 1$ és a keresett érintő $y = 2x - 1$.

II. megoldás. Határozzuk meg egy a pontban az $y = x^2$ érintőjét. Az érintő meredeksége: $y' = 2x$; $m = 2a$. Ez átmege az $(a; a^2)$ ponton, így az érintő

$$y = 2a(x - a) + a^2 = 2ax - a^2.$$

Határozzuk meg most egy b pontban az $y = -x^2 + 4x - 2$ érintőjét. Az érintő meredeksége: $y' = -2x + 4$, $m = -2b + 4$. Ez átmege a $(b; -b^2 + 4b - 2)$ ponton, így az érintő:

$$y = (-2b + 4)(x - b) - b^2 + 4b - 2 = (-2b + 4)x + b^2 - 2.$$

Ha közös az érintő, akkor ugyanaz az egyenes egyenlete, azaz

$$y = 2ax - a^2, \quad y = (-2b + 4)x + b^2 - 2.$$

$$\begin{cases} 2a = -2b + 4, \\ -a^2 = b^2 - 2. \end{cases}$$

Megoldva az egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} 2a &= -2b + 4, & a &= -b + 2, & -(-b + 2)^2 &= b^2 - 2, \\ -b^2 + 4b - 4 &= b^2 - 2, & 0 &= 2b^2 - 4b + 2, & 0 &= b^2 - 2b + 1 = (b - 1)^2, \\ & & b &= 1, & a &= 1. \end{aligned}$$

Innen a közös érintő: $y = 2x - 1$.

b) A félgömb sugara legyen r , ekkor a kúp magassága $2r$. Az egész embléma magassága így $3r$, ami a feladat szerint $1,5$ m: $3r = 1,5$, $r = 0,5$. Nézzük a térfogatot. A kivágott félgömb térfogata:

$$V_{\text{félgömb}} = \frac{4r^3\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{r^3\pi}{2}.$$

A kivágott kúp térfogata:

$$V_{\text{kúp}} = \frac{r^2\pi \cdot 2r}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{r^3\pi}{2}.$$

Az embléma térfogata:

$$V_{\text{embléma}} = V_{\text{félgömb}} + V_{\text{kúp}} = \frac{r^3\pi}{2} + \frac{r^3\pi}{2} = r^3\pi.$$

Ez a beton térfogatának a 85%-a:

$$0,85 \cdot V_{\text{beton}} = r^3\pi, \quad V_{\text{beton}} = r^3\pi \cdot \frac{20}{17} \approx 0,462 \text{ m}^3.$$

Az embléma tömege (2400 kg/m^3 -es beton sűrűséget használva) $0,462 \cdot 2400 = 1108,8$ kg.

Nézzük a felszínt. A kivágott félgömb felszíne:

$$A_{\text{félgömb}} = \frac{4r^2\pi}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{r^2\pi}{2} = 2r^2\pi.$$

Az alkotó $r\sqrt{5}$, így a kivágott kúp felszíne:

$$A_{\text{kúp}} = \frac{2r\pi \cdot \sqrt{5}r}{2} \cdot \frac{3}{4} + 2 \cdot \frac{2r \cdot r}{2} = \frac{3r^2\pi \cdot \sqrt{5}}{4} + 2r^2 = \frac{3\pi \cdot \sqrt{5} + 8}{4} \cdot r^2.$$

Az embléma felszíne:

$$A_{\text{embléma}} = A_{\text{félgömb}} + A_{\text{kúp}} = 2r^2\pi + \frac{3\pi \cdot \sqrt{5} + 8}{4} \cdot r^2 = \frac{3\pi \cdot \sqrt{5} + 8\pi + 8}{4} \cdot r^2.$$

Háromszor kell festeni és a festék 95%-a hasznosul:

$$\begin{aligned} 0,95 \cdot A_{\text{festék}} &= 3 \cdot \frac{3\pi \cdot \sqrt{5} + 8\pi + 8}{4} \cdot r^2, \\ A_{\text{festék}} &= 60 \cdot \frac{3\pi \cdot \sqrt{5} + 8\pi + 8}{76} \cdot r^2 \approx 10,7 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

7. a) 18 tudós e-mail segítségével tartja a kapcsolatot a világban. Bármely két tudós egymással angol, német vagy orosz nyelven levelezik, mindig ugyanazt a nyelvet használják egymás között. Tudjuk, hogy nincs három olyan tudós, aki egymás között angol, vagy orosz nyelvet használ. Bizonyítsuk be, hogy létezik közöttük három, akik egymással németül leveleznek. (9 pont)

b) Aladár négyjegyű számokat ír fel egy papírlapra, melyek csak az 1; 2; 3 és 4 számjegyeket tartalmazhatják (lehet ismétlődés, nem kell minden számjegyet felhasználni minden négyjegyű számban). Figyel arra, hogy 1-es után csak 4-es, páros számjegy után csak páratlan jegy következhet. Hányféle számot tud leírni így? (7 pont)

Megoldás. a) A feladatot általánosan oldjuk meg: ha 18 tudós 3 nyelvet használ, akkor biztosan van olyan nyelv, amit 3 tudós egymás között használ.

A használt nyelvek legyenek A , B és C . Tekintsük az egyik tudóst, ő 17 másikkal levelez. A skatulyaelv miatt lesz olyan nyelv (legyen ez az A nyelv), amin legalább 6 másik tudóssal levelez. Ha a 6 levelező partner között van kettő, akik egymással az A nyelven leveleznek, akkor készen vagyunk, hiszen találtunk három tudóst, aki az A nyelven leveleznek egymás között.

Ha ez nem teljesül, akkor ez a 6 tudós egymás között csak a B és C nyelvet használja. Tekintsünk most ebből a hat tudósból egyet, aki a másik öttel levelez. A skatulyaelv miatt biztosan van olyan nyelv (legyen ez a B nyelv), amit legalább 3 másikkal használ. Ezen másik három most egymás között ha használja a B nyelvet, akkor találunk három tudóst, aki a B nyelvet használja, ha meg nem, akkor ők egymás között a C nyelvet használják, és ezért vagyunk készen.

Ezt a feladatra alkalmazva adódik az állítás.

b) Építsük fel balról jobbra a számokat.

Jelölje $f_1(n)$ az n hosszúság esetén az 1-esre végződő számok számát.

Jelölje $f_2(n)$ az n hosszúság esetén az 2-esre végződő számok számát.

Jelölje $f_3(n)$ az n hosszúság esetén az 3-asra végződő számok számát.

Jelölje $f_4(n)$ az n hosszúság esetén az 4-esre végződő számok számát.

Ekkor

$$\begin{aligned} f_1(1) &= f_2(1) = f_3(1) = f_4(1) = 1 \quad \text{és} \\ f_1(2) &= f_2(1) + f_3(1) + f_4(1), \\ f_2(2) &= f_3(1), \\ f_3(2) &= f_2(1) + f_3(1) + f_4(1), \\ f_4(2) &= f_1(1) + f_3(1), \quad \text{illetve} \\ f_1(n+1) &= f_2(n) + f_3(n) + f_4(n), \\ f_2(n+1) &= f_3(n), \\ f_3(n+1) &= f_2(n) + f_3(n) + f_4(n), \\ f_4(n+1) &= f_1(n) + f_3(n). \end{aligned}$$

Táblázatba foglalva:

n	$f_1(n)$	$f_2(n)$	$f_3(n)$	$f_4(n)$	Összes
1	1	1	1	1	4
2	3	1	3	2	9
3	6	3	6	6	21
4	15	6	15	12	48

Tehát 48 ilyen számot tud felírni.

Megjegyzés. Ha S_n -nel jelöljük az összeget, akkor arra igaz, hogy

$$S_1 = 4; \quad S_2 = 9; \quad S_n = S_{n-1} + 3 \cdot S_{n-2}; \quad n \geq 3.$$

8. a) Oldjuk meg a következő egyenletet a pozitív egészek halmazán:

$$2 \cdot (x; y) + 17 \cdot [x; y] = 257,$$

ahol a „kerek” zárójel a két szám legnagyobb közös osztóját, a „szögletes” zárójel pedig a legkisebb közös többszörösét jelöli. (9 pont)

b) Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai 2 és 14, szárjai 10 egység hosszúak. Meghúzzuk a belső szögeinek szögfelezőjét, amelyek egy négyszöget zárnak be. Amennyiben ennek a négyszögnek létezik a beírt és körülírt köre, mekkora ezen körök sugara? (7 pont)

Megoldás. a) A legnagyobb közös osztóban a közös prímelek, a legkisebb közös többszörösben az összes prím, tehát a legnagyobb közös osztó prímjei is szerepelnek; és a legnagyobb közös osztóban levő prímelek kitevője nem lehet nagyobb a legkisebb közös többszörösben szereplő prímelek kitevőjénél. Ezért $(x; y) \mid [x; y]$. Az egyenlet bal oldala osztható $(x; y)$ -nal, tehát a jobb oldal is: $(x; y) \mid 257$. Mivel 257 prím, ezért két eset van.

I. eset: $(x; y) = 257$.

$$2 \cdot (x; y) + 17 \cdot [x; y] = 257, \quad 2 \cdot 257 + 17 \cdot [x; y] = 257, \quad 17 \cdot [x; y] = -257.$$

Ekkor a legkisebb közös többszörösre negatív szám adódik (de még egésznek sem egész), tehát ez nem lehet.

II. eset: $(x; y) = 1$.

$$\begin{aligned} 2 \cdot (x; y) + 17 \cdot [x; y] &= 257, & 2 \cdot 1 + 17 \cdot [x; y] &= 257, \\ 17 \cdot [x; y] &= 255, & [x; y] &= 15, \end{aligned}$$

azaz olyan számokat keresünk, amelyek relatív prímelek és csak 3-as és 5-ös prímekeket tartalmazhatnak, mert a legkisebb közös többszörös a 15.

Négy lehetőség van:

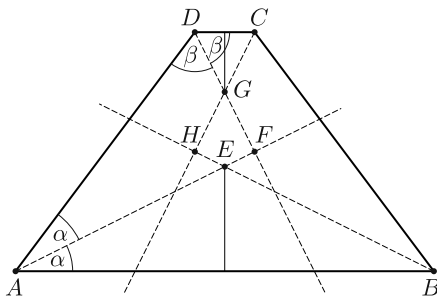
x	1	15	3	5
y	15	1	5	3

b) Készítsünk ábrát. Jelöljünk meg pár szöget és bocsássunk merőlegest a G és E pontokból a megfelelő alapokra. A trapéz magassága

$$10^2 = m^2 + \left(\frac{14-2}{2}\right)^2 \Rightarrow m = 8.$$

A szögekre pedig

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}; \quad \alpha + \beta = 90^\circ.$$



A szimmetrikus trapéz miatt a keletkezett négyszög szimmetrikus a GE egyenesre és konvex, tehát deltoid. A konvex deltoidoknak van beírt köre (szembeni oldalak összege megegyezik).

$\angle AFD = \angle BHC = 90^\circ$, ugyanis a trapéz egy szárán levő szögek összege 180° , így a szögfelezők 90° -os szöget zárnak be. Tehát a négyszögünk 2 szemközti szögének összege 180° , így van köré írt köre is.

Derékszögű háromszögekben számolva:

$$\begin{aligned} AE &= \frac{7}{\cos \alpha}, & AF &= 10 \cdot \cos \alpha, & EF &= 10 \cdot \cos \alpha - \frac{7}{\cos \alpha}, \\ DG &= \frac{1}{\cos \beta}, & DF &= 10 \cdot \cos \beta, & GF &= 10 \cdot \cos \beta - \frac{1}{\cos \beta}. \end{aligned}$$

$EFG\Delta$ derékszögű és az átfogója a négyszög köré írt kör sugarának a kétszerese, azaz

$$(2R)^2 = EF^2 + GF^2 \Rightarrow R = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{EF^2 + GF^2}.$$

A beírt körre igaz, hogy

$$t = \frac{k \cdot r}{2}, \quad 2 \cdot \frac{EF \cdot GF}{2} = r \cdot \frac{(2 \cdot EF + 2 \cdot GF)}{2}, \quad r = \frac{EF \cdot GF}{EF + GF}.$$

Az adatokat behelyettesítve kapjuk: $r = 0,745$; $R = 1,25$.

9. a) Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) &= \\ &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}, \end{aligned}$$

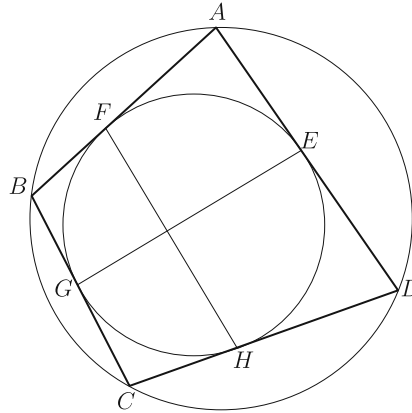
ahol $n \in \mathbb{N}^+$.

(8 pont)

b) Adott egy olyan húrnégyszög, ami egyben érintőnégyyszög is.

Az ábrán jelöltük az érintési pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az EG és FH szakaszok merőlegesek egymásra.

(8 pont)



Megoldás. a) Teljes indukcióval bizonyítunk.

I. Nézzük meg, hogy teljesül-e a bizonyítandó állítás az $n = 1$ és $n = 2$ esetre:

$$\begin{aligned} n = 1 & \qquad \qquad \qquad 1 \cdot 2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{3} = 2, \\ n = 2 & \qquad \qquad \qquad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3} = 8. \end{aligned}$$

II. Tegyük fel, hogy $n = k$ -ig minden értékre teljesül, hogy

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k \cdot (k+1) = \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{3}.$$

III. Nézzük az $n = k+1$ esetet, induljunk ki a bal oldalból:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k \cdot (k+1) + (k+1) \cdot (k+2) &= \\ &= \frac{k \cdot (k+1) \cdot (k+2)}{3} + (k+1) \cdot (k+2) = \\ &= (k+1)(k+2) \left(\frac{k}{3} + 1 \right) = (k+1)(k+2) \frac{k+3}{3} = \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}, \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + k \cdot (k+1) + (k+1) \cdot (k+2) &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}. \end{aligned}$$

Ezt akartuk kapni, tehát a bizonyítás kész.

b) Húzzuk meg a FG , GH , HE és EF szakaszokat. $HFG \sphericalangle = CGH \sphericalangle = CHG \sphericalangle = \alpha$, mivel mind a GH szakasz kerületi vagy érintő szárú kerületi szögei. Tehát $GCH \sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha$.

$FEA \sphericalangle = EFA \sphericalangle = FGE \sphericalangle = \beta$, mivel mind az FE szakasz kerületi vagy érintő szárú kerületi szögei. Tehát $FAE \sphericalangle = 180^\circ - 2\beta$.

Mivel az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, ezért a szemben fekvő szögeinek összege 180° , tehát

$$180^\circ - 2\alpha + 180^\circ - 2\beta = 180^\circ,$$

$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$, $\alpha + \beta = 90^\circ$. Innen $GMF \sphericalangle = 180^\circ - \alpha - \beta = 90^\circ$ és ezt kellett bizonyítani.

