

A koronavírus világjárvánnyá szélesedése bizonyára felkeltette a KöMaL olvasóinak érdeklődését a *járványmodellek* iránt. Ez az írás nekik szól: a legelterjedtebb (ún. SIR-féle) járványmodell mutatjuk be. Bonyolultsága miatt mégis le kell mondanunk a koronavírus terjedésének valódi modellezéséről, tehát csak bevezetésre számítson az Olvasó.

Megnehezíti dolgunkat, hogy *dinamikus* folyamatról van szó, ahol minden pillanatban a már fertőzöttek egy része megfertőzi a még nem fertőzöttek (röviden: megfertőzhető) bizonyos részét, miközben a fertőzöttek másik része meggyógyul vagy meghal. A szakirodalmat követve, ebben a leírásban a könnyebb érthetőség érdekében több végletes egyszerűsítő feltevést teszünk: *a*) a népesség létszáma időben állandó; *b*) a fertőzésben senki sem hal meg; *c*) ha valaki kigyógyul a fertőzésből, az már nem fertőződik meg és nem fertőz újra; *d*) a fertőzési valószínűség független a népesség egyéb (nemi, életkori, területi, egészségi állapot- stb.) jellemzőitől; *e*) a gyógyulási valószínűség független az egészségügyi ellátástól.

Három típust különböztetünk meg: a *megfertőzhető* (susceptibles, S), (népességi) részarányuk $s > 0$; a *fertőzöttek* (infectious, I), részarányuk $i > 0$; végül a *gyógyultak* (recovered, R), de ide tartoznak az eleve immunisak is: részarányuk $r > 0$, innen a modell közkeletű elnevezése: SIR-modell. Az ilyen típusú modelleket egyébként *rekeszmodellek*nek nevezik.

Egyenleteinkben kulcsszerepet kap a fertőzési és a gyógyulási ráta. Ezek függvényében igazoljuk, hogy *a megfertőzhető részarányának kicsi kezdőértékeire elhal a járvány, és nagy kezdőértékeire fellángol*. Azt is szemléltetni tudjuk, hogyan laposítja el a járvány időbeli lefutását, ha a fertőzési rátát elkülönítéssel vagy a megfertőzhető részarányának kezdőértékét oltással csökkentjük.

A technikai egyszerűség kedvéért és a szokással ellentétben, nem folytonos, hanem diszkrét időben írjuk föl a népességi részarányok dinamikáját, egységnyinek rögzítve az időszak hosszát, pl. nap, hét, $t = 0, 1, 2, \dots$ az időszakok indexe. A jobb érthetőség kedvéért az $S \rightarrow I \rightarrow R$ időrendi sorrendet felcserélve adjuk meg a három egyenletet.

Föltesszük, hogy az *új* fertőzések részaránya egyaránt arányos a megfertőzhető és a fertőzöttek részarányával, de az *újonnan* gyógyultak részaránya csak a fertőzöttek részarányával arányos. Visszatérve a „rekeszek tartalmára”:

A *megfertőzhető részarányának csökkenése* egyenesen arányos a megfertőzhető részarányának és a fertőzöttek részarányának szorzatával:

$$(1) \quad s_{t+1} - s_t = -\beta s_t i_t,$$

ahol $\beta > 0$ a fertőzési ráta.

A *gyógyultak részarányának növekedése* egyenesen arányos a fertőzöttek részarányával:

$$(2) \quad r_{t+1} - r_t = \gamma i_t,$$

ahol $\gamma > 0$ a gyógyulási ráta.

Valójában az az eset az érdekes, amikor a gyógyulási ráta kisebb a fertőzési rátánál, és az időegység megfelelő megválasztásakor a fertőzési ráta legfeljebb 1: $0 < \gamma < \beta \leq 1$.

Mivel mindenki vagy megfertőzhető, vagy fertőzött, vagy gyógyult, ezért a három részarány összege 1:

$$s_t + i_t + r_t = 1,$$

azaz az összeg időbeli változása 0:

$$s_{t+1} - s_t + i_{t+1} - i_t + r_{t+1} - r_t = 0.$$

Ebbe behelyettesítve (1)-et és (2)-t következik:

A *fertőzöttek részarányának változása*:

$$(3) \quad i_{t+1} - i_t = (\beta s_t - \gamma) i_t.$$

Figyeljük meg, hogy beszorzás után (3) jobb oldalán két tag különbsége szerepel: a kisebbítendő az új fertőzések részaránya, a kivonandó pedig az újonnan gyógyultaké.

Bevezetjük a megfertőzhető részarányának *kritikus értékét*, amelynél a (3) egyenlet jobb oldala 0, azaz a fertőzöttek részaránya változatlan (maximális, mert kisebb értékre növekszik, nagyobbra csökken):

$$s^o = \frac{\gamma}{\beta} < 1.$$

Becsempészve (3)-ba s^o -t, jobban látszik s^o szerepe a fertőzöttek részarányának alakulásában:

$$(4) \quad i_{t+1} - i_t = \beta (s_t - s^o) i_t.$$

Mivel r_t nem hat sem s_{t+1} -re, sem i_{t+1} -re, ezért a (2) egyenlettel ráérünk utólag törődni; a modell magva (1) és (4), vagy alkalmasabb alakban:

$$(5) \quad s_{t+1} = (1 - \beta i_t) s_t$$

és

$$(6) \quad i_{t+1} = [1 + \beta(s_t - s^\circ)]i_t.$$

Az (5)–(6) rekurziót elsőrendű nemlineáris differenciaegyenlet-rendszernek nevezzük: elsőrendű, mert a jövő csak a jelentől függ; nemlineáris, mert két változó szorzata is szerepel mindkét egyenlet jobb oldalán. A rekurzió (s_t, i_t) megoldása (pályája) a kezdeti részaránypárostól függ: (s_0, i_0) , ahol $i_0 \approx 0$ (nagyon kicsi pozitív szám, a fertőzés hirtelen jelenik meg), és helyet hagyva az esetleg pozitív r_0 -nak, $s_0 \leq 1 - i_0$.

1. segédtétel. Az (5)–(6) rendszer minden pályájára teljesül:

$$(7) \quad s_t, i_t \geq 0 \quad \text{és} \quad s_t + i_t \leq 1.$$

Bizonyítás. Indukcióval bizonyítunk: feltevés szerint (7) teljesül $t = 0$ -ra, és belátjuk, hogyha (7) teljesül t -re, akkor teljesül $t + 1$ -re.

Amíg $i_t \geq 0$, addig (2) értelmében $r_{t+1} \geq r_t$. Mivel $s_t + i_t = 1 - r_t$, ezért

$$s_{t+1} + i_{t+1} \leq s_t + i_t \leq 1. \quad \square$$

Szavakkal: (1)-ből és (3)-ból következik, hogy amíg van fertőzött, addig a megfertőzhető részaránya monoton csökken, a gyógyultaké viszont monoton nő.

Most már kimondható az

1. tétel. a) Ha a megfertőzhető részarányának kezdőértéke legfeljebb a kritikus érték: $s_0 \leq s^\circ$, akkor a fertőzöttek részaránya monoton tart 0-hoz.

b) Ha a megfertőzhető részarányának kezdőértéke nagyobb, mint a kritikus érték: $s^\circ < s_0 < 1$, akkor a fertőzöttek i_t részaránya egészen addig növekszik, amíg a megfertőzhető részaránya nem csökken a kritikus érték alá, aztán pedig i_t a végtelenben 0-hoz tart.

Bizonyítás. a) Ha $s_0 \leq s^\circ$, akkor $s_t < s^\circ$ ($t > 0$). Két alesetet különböztetünk meg.

(i) Ha $s_0 < s^\circ$, akkor (6)-ot felírva $0, 1, \dots, t - 1$ időszakra, és figyelembe véve, hogy $s_{t-1} < \dots < s_1 < s_0$, adódik

$$(8i) \quad i_t = [1 + \beta(s_{t-1} - s^\circ)] \cdot \dots \cdot [1 + \beta(s_0 - s^\circ)]i_0 < [1 + \beta(s_0 - s^\circ)]^t i_0,$$

azaz i_t gyorsan tart 0-hoz. (ii) Ha $s_0 = s^\circ$, akkor az első lépést külön kell kezelni. $i_1 = i_0$, és (5) szerint $s_1 = (1 - \beta i_0)s^\circ$, majd (8i) szerint

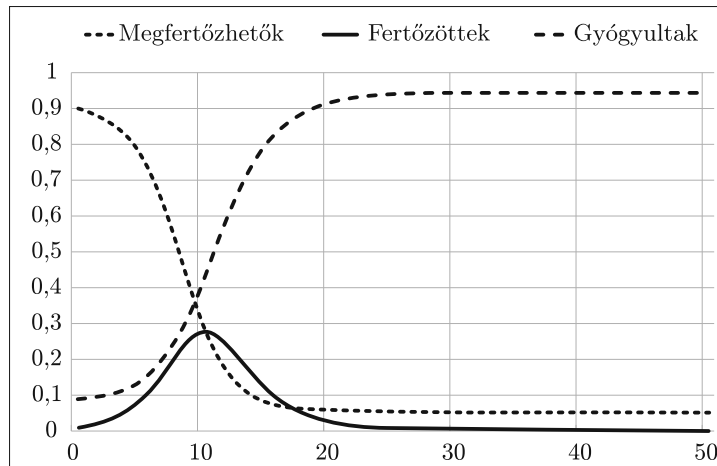
$$(8ii) \quad i_t < [1 + \beta(s_1 - s^\circ)]^{t-1} i_1 = [1 - \beta^2 i_0 s^\circ]^{t-1} i_0, \quad t \geq 1.$$

b) $0 < s^\circ < s_0 < 1$ esetén, amíg a megfertőzöttek részaránya nagyon kicsi: $i_t \approx 0$, addig (5) miatt $s_t \approx s_0$ (csak lassan csökken), tehát i_t részarány (6) és $s^\circ < s_0 < 1$ miatt közelítőleg egy $1 + \beta s_0 - \gamma$ -hányadosú mértani sorozat szerint nő. Belátjuk, hogy előbb-utóbb s_t a kritikus érték alá süllyed, s a) szerint i_t ezután végleg csökkenésre vált.

Indirekt bizonyítunk. Tegyük föl, hogy $s_t \geq s^\circ$ minden t -re. Az (s_t) alulról korlátos csökkenő sorozat, tehát van határértéke, amelyre $s^* \geq s^\circ$ áll. (6) szerint $i_t \geq i_0$, azaz (5) szerint $s_t \leq (1 - \beta i_0)^t s_0$, azaz $s^* = 0$, s ez ellentmond $s^* \geq s^\circ > 0$ -nak. \square

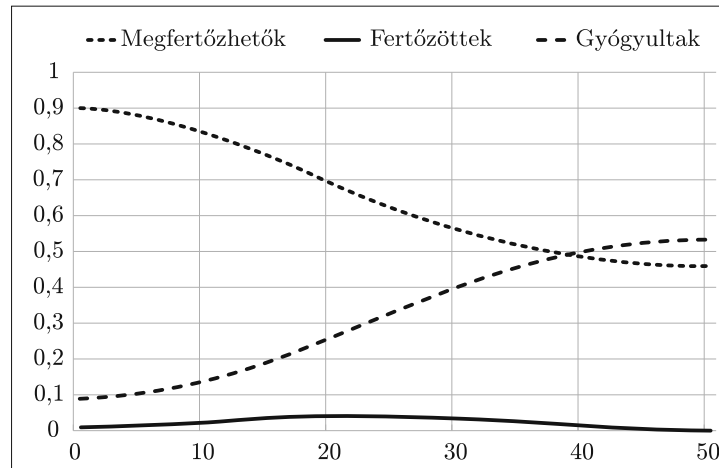
További vizsgálatot igényelne, hogy hosszú távon milyen esetben szűnik meg a megfertőzhetőség (és válik teljessé a gyógyultság), számpéldáinkban azonban az idők végezetéig maradnak megfertőzhetőek.

Rátérünk a numerikus szemléltetésre. Önkényesen választjuk, hogy $i_0 = 0,01$. Első futásunkban $\beta = 1$ és $\gamma = 1/3$, valamint a megfertőzhető részarányának nagy kezdőértéket adunk: $s_0 = 0,9 > s^\circ = 1/3$. Egyszerű programmal elkészíthetjük az 1. ábrát. Legérdekesebb eredmény: a 10. időszakban éri el a fertőzöttség a maximumát, a lakosság 27,7%-a fertőzött. A 20. időszakra a fertőzöttség gyakorlatilag eltűnik, de további számítások szerint a megfertőzhetőség megmarad 5%-nál.



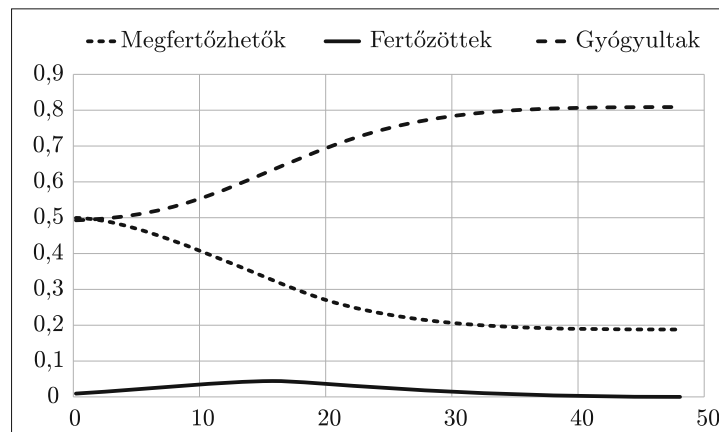
1. ábra. Erős fertőzés, sok megfertőzhető

A második futásban feltesszük, hogy elkülönítéssel sikerült az erős fertőzési rátát gyengíteni: $\beta = 0,5$. Az előző programot használva kapjuk a 2. ábrát. A legérdekesebb eredmény: a fertőzöttség jóval később, a 22. időszak körül éri el a maximumát, s a lakosságnak csupán 4,5%-a fertőzött, de a megfertőzhetők részaránya lassabban csökken, és megáll 45%-nál.



2. ábra. Gyengén fertőző, sok megfertőzhető

A harmadik futásnál feltesszük, hogy oltással sikerült a megfertőzhetők nagy kezdő-részarányát jelentősen csökkenteni, de a kritikus érték fölött maradv: $s_0 = 0,5 > s^o$. A fertőzési ráta újra nagy: $\beta = 1$. A 3. ábrán látható, hogy a maximális fertőzöttség véletlenül ismét 4,4%, de már a 16. időszakban elérjük, és alacsonyabb lesz a megfertőzhetők részarányának határértéke: 19%.



3. ábra. Erősen fertőző, kevés megfertőzhető

Eddig kizártuk a $\gamma \geq \beta$ esetet. A teljesség kedvéért most röviden megvizsgáljuk, mi történik ekkor. Formálisan $s^o \geq 1$, tehát az 1. tétel b) pontja értelmében minden $s_0 \leq 1$ kezdőállapotra teljesül az $s_0 \leq s^o$ feltétel, azaz a járvány elhal.

Összefoglalásként, ne várjunk csodákat egy modelltől. Ez a modell csak a legegyszerűbb összefüggéseket képes megvilágítani, például, hogy létezik a megfertőzhetők részarányának egy kritikus értéke. Ha a kritikus érték alatról vagy fölöttől indítjuk a rendszert, az nemcsak kvantitatíve, de kvalitatíve is másképp viselkedik. Modellünk azonban képtelen kezelni a koronavírus-járványnak azt a központi kérdését, hogy az elkülönítés a fertőzési folyamat lassításával megnöveli a gyógyulás valószínűségét (lesz elég lélegeztetőgép). Ennek részletezése azonban túlmutat a tanulmányon.