Mely háromszögekre érvényes az alábbi egyenlőtlenség, amelyben S az ABC háromszög súlypontja és r a köréje írt kör sugara:

$$SA^2 + SB^2 + SC^2 > 8\,r^2/3. \tag{1}$$

I. megoldás. Előzetes tájékozódásul tüstént látni, hogy szabályos háromszögre érvényes az állítás, a bal oldal mindegyik tagja r^2. – Ezzel szemben semmilyen derékszögű ABC háromszögre nem érvényes, mert áttérve az AA_1, BB_1, CC_1 súlyvonalakra, ezek négyzetei is derékszögű háromszögekből fejezhetők ki és (1) bal oldala

$$\frac{4}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \frac{4}{9}\left(b^2 + \frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) = \frac{2}{3}c^2 = \frac{8}{3}\left(\frac{c}{2}\right)^2,$$

és ez egyenlő a jobb oldallal, hiszen itt $r = c/2$. – Továbbá – mivel rögzített körbe olyan háromszögek is beírhatók, melyeknek mindegyik oldala kisebb, mint a sugár, és a súlyvonal mindig kisebb, mint a háromszög legnagyobb oldala, másfelől minden ilyen háromszög tompaszögű, mert nem tartalmazza a kör középpontját – az a *sejtés*ünk támad, hogy tompaszögű háromszögekre sem érvényes az (1) egyenlőtlenség.

Megmutatjuk, hogy (1) akkor és csak akkor érvényes, ha a háromszög hegyesszögű. Ismeretes, hogy a súlyvonalak kifejezhetők az oldalakkal, pl.

$$CC_1^2 = \frac{1}{4}(2\cdot CA^2 + 2\cdot CB^2 - AB^2).$$

Ezekkel a bal oldal igy alakul:

$$\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) = \frac{4r^2}{3}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma), \tag{$*$}$$

mindjárt felhasználtuk az oldalak $a = 2r\ \sin\alpha, \dots$ kifejezését a sugárral és a megfelelő szöggel. Így az (1)-gyel ekvivalens

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma > 2$$

kérdésre jutottunk, és ez ismét a következőkkel ekvivalens: mely háromszögekben teljesül

$$1 > \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma? \tag{2}$$

A jobb oldalon két tényező helyére kissé bonyolultabb kifejezést írunk – az első ilyen $\cos\alpha = -\cos(\beta+\gamma)$ –, de az addíciós tételek alapján végül egyszerűbbet, szorzatot kapunk:

$$\begin{gathered}-\cos\alpha\ \cos(\beta+\gamma) - \cos\beta\ \cos(\alpha+\gamma) + \cos^2\gamma = \\ = -2\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma + \sin\gamma(\cos\alpha\ \sin\beta + \cos\beta\ \sin\alpha) + \cos^2\gamma = \\ = -2\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma + 1,\end{gathered}$$

mert $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$. Eszerint (2) és vele (1) akkor és csakis akkor teljesül, ha

$$\cos\alpha\ \cos\beta\ \cos\gamma > 0.$$

És ez bizonyítja állításunkat, ugyanis egyrészt hegyesszögű háromszögben mindhárom szög cosinusa pozitív, másrészt nem pozitív a szorzat, ha van a háromszögben derékszög, mert akkor valamelyik tényező 0, és akkor sem, ha van tompaszög, mert ilyenből csak egy lehet, s emiatt pedig egy tényezője révén negatív lenne a szorzat. – Ezzel bebizonyítottuk állításunkat. A választ megadtuk.

II. megoldás. Az előző megoldás ($*$) kifejezéséből így is haladhatunk tovább:

$$a^2 + b^2 + c^2 > 8r^2 = \frac{2c^2}{\sin^2\gamma} = \frac{2c^2}{1-\cos^2\gamma} = \frac{8a^2b^2c^2}{4a^2b^2 - (a^2+b^2-c^2)^2},$$

ahol a nevező nyilvánvalóan pozitív. Eszerint a kérdéses háromszögekben a bal és jobb oldal különbségére teljesülnie kell:

$$\begin{gathered}4a^2b^2(a^2+b^2-c^2) - (a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)^2 > 0, \\ (a^2+b^2-c^2)\{4a^2b^2 - (a^2+b^2)^2 + c^4\} > 0, \\ (a^2+b^2-c^2)(c^2+a^2-b^2)(c^2-a^2+b^2) > 0, \\ 8a^2b^2c^2\cos\gamma\ \cos\beta\ \cos\alpha > 0,\end{gathered}$$

tehát ismét a fönti követelményre jutottunk.

III. megoldás. Jelöljük tetszőlegesen választott koordináta-rendszerben a háromszög csúcsainak koordinátáit $(a_1;$ $a_2)$-vel, $(b_1; b_2)$-vel, $(c_1; c_2)$-vel, egy tetszőleges P pont koordinátáit $(x; y)$-nal, és P-nek a csúcsoktól mért távolságainak a négyzetösszegét $Q(P)$-vel. Akkor

$$\begin{aligned} Q(P) &= PA^2 + PB^2 + PC^2 = \\ &= (x-a_1)^2 + (x-b_1)^2 + (x-c_1)^2 + (y-a_2)^2 + (y-b_2)^2 + (y-c_2)^2 = \\ &= 3(x-s_1)^2 + 3(y-s_2)^2 + Q_0, \end{aligned}$$

ahol:

$$s_i = (a_i + b_i + c_i)/3, \qquad i = 1,\ 2,$$
$$Q_0 = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 3s_1^2 + a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 - 3s_2^2.$$

Az $(s_1;\ s_2)$ koordinátájú pont a háromszög S súlypontja, és $(x-s_1)^2 + (y-s_2)^2 = PS^2$.

Ha most P helyére S-et írunk, kapjuk, hogy $Q_0 = Q(S)$, így általában

$$Q(P) = 3 \cdot PS^2 + Q(S).$$

Ha itt P helyére a háromszög köré írt körének a K középpontját írjuk, kapjuk, hogy

$$3r^2 = 3KS^2 + SA^2 + SB^2 + SC^2.$$

A kapott összefüggés szerint (1) ekvivalens a $3KS < r$ egyenlőtlenséggel. Ismeretes, hogy S a KM szakasz K-hoz közelebbi harmadolópontja (amit könnyű a $KISFIAM$ szó segítségével megjegyezni, melyben a K, S, M betűk helyzete megfelel a velük jelölt pontok helyzetének, sőt F a Feuerbach-kör középpontjának felel meg). Tehát $3KS = MK$, így (1) azzal ekvivalens, hogy a háromszög magasságpontja a háromszög köré írt kör belsejében van, vagyis a háromszög hegyesszögű.

Megjegyzés. Legyen általában

$$Q(P) = \lambda_A \cdot PA^2 + \lambda_B \cdot PB^2 + \lambda_C \cdot PC^2,$$

ahol λ_A, λ_B, λ_c tetszés szerinti számok, amelyekre $\lambda = \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C \neq 0$. A megoldásban alkalmazott meggondolást követve belátható, hogy

$$Q(P) = \lambda \cdot PT^2 + Q(T),$$

ahol T koordinátái $t_i = (\lambda_A a_i + \lambda_B b_i + \lambda_C c_i)/\lambda$ és $i = 1, 2$. Tehát a $Q(P)$ függvény „szintvonalai” koncentrikus körök, vagyis kör azoknak a pontoknak a mértani helye, ahol $Q(P)$ értéke egy előre adott állandóval egyenlő, feltéve, hogy ez az állandó nem túl kicsi, és e körök középpontja minden állandóra ugyanaz. A függvény a minimumát abban a T pontban veszi fel, mely a háromszög csúcsainak a λ_A, λ_B, λ_C súlyokhoz tartozó súlypontja (a súlyok negatívak is lehetnek). Érdemes eltöprengeni azon, milyen (természetesen a háromszög meghatározó adataitól függő) súlyok mellett kapjuk súlypontul a különböző nevezetes pontokat. Ezek alapján a most levezetett összefüggés segítségével olyan állításokat kaphatunk, amelyeket más módszerrel csak nehézkesen, hosszas számolással láthatnánk be.