Mérőlapok felvételire

Az alább közölt feladatsor feladatai olyan jellegűek, mint amilyent az egyetemek és a főiskolák felvételizői szoktak megoldani a felvételi vizsgákon. Megoldásukat mindazoknak javasoljuk, akik felvételire készülnek. Tanácsoljuk a megoldóknak, hogy a megoldásokat időre végezzék. A megoldásra és leírásra fordítható idő összesen 180 perc.

A feladatok megoldását a TIT Budapesti Székházában (VIII. Múzeum u. 7.) 1980. márc. 19-én du. 1/2 5-től ismerteti a sorozat összeállítója, **Rábai Imre** *egyetemi adjunktus*. Az érdeklődők itt tehetik fel a felvételi vizsgával kapcsolatos kérdéseiket is.

1. Egy derékszögű háromszög egyik befogója 15 egység, a másik befogónak az átfogóra eső vetülete 16 egység. Számítsuk ki a háromszögbe írt kör sugarát!

2. Mely valós értékekre negatív az

$$x\lg(x^2-x+1)$$

kifejezés?

3. Egy egyenlő oldalú háromszög súlypontján át a háromszög síkjában húzzunk egy tetszőleges egyenest, és tekintsük a háromszög csúcspontjainak ezen egyenestől mért távolságát.

Igazoljuk, hogy a három távolság négyzetösszege állandó!

4. Az ABC háromszögben $AB=4,\ BC=3$ és $AC=\sqrt{5}$ egység. Igazoljuk, hogy az A és a C csúcspontokból kiinduló súlyvonalak merőlegesek egymásra!

5. Az ABC háromszög magasságpontja $M(0;\ 2)$. Az AM magasságvonal a BC oldalegyenest az $A_1(2;\ -2)$ pontban metszi. Az AB oldal felezőpontja $F(-2;\ 1)$. Határozzuk meg a háromszög csúcspontjainak koordinátáit!

6. Az R sugarú gömbbe egyenlő oldalú kúpot írunk. A gömb középpontjától mekkora távolságban kell a kúp alaplapjával párhuzamos síkot fektetni, hogy a sík által a gömbből és a kúpból kimetszett körök területének különbsége (a körgyűrű területe) a legnagyobb legyen?

7. Tekintsük az $f_a(x)=x^2-2(a+1)x+2a^2+a-1$ függvényt, ahol a valós paraméter.

a) Határozzuk meg az a értékét úgy, hogy a függvény minden x-re csak pozitív értéket vegyen fel!

b) Legyenek az $f_a(x)=0$ egyenlet gyökei x_1 és x_2. Az egyenlet megoldása nélkül írjunk fel olyan másodfokú egyenletet, amelynek gyökei $\dfrac{x_1}{x_2}$ és $\dfrac{x_2}{x_1}$!

Milyen a esetén van valós megoldása az egyenletnek?

8. Igazoljuk, hogy az $a\sin x+b\cos x+c=0$ és az $a\,\mathrm{tg}x+b\,\mathrm{ctg}x+2c=0$ egyenletek közül az egyiknek biztosan van megoldása, ha $a,\ b,\ c$ valós számok, és $a^2+b^2>0$.