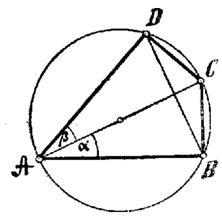
Két szög összegének és külömbségének sinusát, valamint két szög sinusának összegét és külömbségét könnyen számíthatjuk ki a *Ptolemäus*- féle tételekkel.

I. Legyen $AC = 2r = 1$, úgy

$$CB = \sin\alpha,\ AB = \cos\alpha,\ DC \sin\beta,\ AD = \cos\beta,$$

$$DB = 2r\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha+\beta)$$



Ptolemäus első tétele alapján:

$$AC \cdot DB = CB \cdot AD + AB \cdot CD.$$

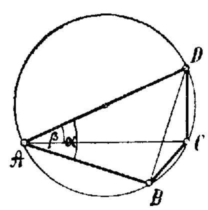
A fentebbi értékeket helyettesítve:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

II. Legyen $AD = 2r = 1$, úgy

$$AB = \cos\alpha,\ CB = 2r\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha-\beta)$$

$$AC = \cos\beta,\ DC = \sin\beta,\ DB = \sin\alpha.$$



A második ábrára Ptolemäus tételét alkalmazva:

$$DB \cdot AC = AD \cdot CB + AB \cdot DC$$

a függvényeket helyettesítve:

$$\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha-\beta) + \cos\alpha\sin\beta$$

vagy

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

III. Ptolemäus második tétele szerint (l. első ábra):

$$\frac{BD}{AC} = \frac{AB \cdot BC + AD \cdot CD}{AD \cdot AB + DC \cdot CB}$$

I)-ből a függvényeket helyettesítve:

$$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

vagy

$$2\sin(\alpha+\beta) = \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}{\cos(\alpha-\beta)},$$

miből

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$$

vagy ha

$$2\alpha = \varphi,\ 2\beta = \psi,$$

úgy

$$\sin\varphi+\sin\psi=2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$$

IV. Ptolemäus második tételét a második ábrára alkalmazva:

$$\frac{DB}{AC}=\frac{AB\cdot CB+AD\cdot DC}{AB\cdot AD+DC\cdot CB}$$

(II)-ből a függvényeket helyettesítve:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\beta}=\frac{\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta}{\cos\alpha+\sin\beta\sin(\alpha-\beta)}.$$

A törtek nevezőit eltávolítva:

$$\sin\alpha\cos\alpha-\sin\beta\cos\beta=\sin(\alpha-\beta)[\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta]$$

vagy

$$\sin 2\alpha-\sin 2\beta=2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$$

s így

$$\sin\varphi-\sin\psi=2\cos\frac{\varphi+\psi}{2}\sin\frac{\varphi-\psi}{2}.$$

(Bulletin Scientifique.)