

I. rész

1. a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$x^2 - 14 = 2\sqrt{x^2 + 1}. \quad (6 \text{ pont})$$

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2y}{2x^2 + y} &= \frac{1}{2}, \\ \frac{12x^2y}{4x^2 + 3y} &= \frac{1}{5}. \end{aligned} \quad (7 \text{ pont})$$

2. a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$4^x + 4 \cdot 2^{-x} = 5. \quad (6 \text{ pont})$$

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\sin^6 x + \cos^6 x = -2 + 3 \cos 2x. \quad (7 \text{ pont})$$

3. a) Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$1 + \frac{3}{\log_4(x^2 - 6x + 13)} = \frac{4}{\log_2(x + 1)} + \frac{\log_2(x + 1)^2}{2}. \quad (8 \text{ pont})$$

b) Egy szabályos dobókockát hatvenszor feldobva 15 esetben kaptunk hatost. Ezt a kísérletet egymás után többször elvégezve mindig ehhez hasonló eredményre jutunk. Emiatt úgy sejtjük, hogy a dobókocka „cinkelt”, azaz a hatos megnövelt valószínűséggel bír. Mekkora ez a valószínűség, ha minden 60-as sorozat esetén 15 lett a kapott érték (azaz várható érték 15)? (4 pont)

4. a) Egy nem állandó számtani sorozat első, második és negyedik eleméhez rendre 1-et adunk, így egy mértani sorozat második, harmadik és negyedik elemét kapjuk. A mértani sorozat első, második és harmadik elemének az összege 7. Mennyi a számtani sorozat 1010-edik eleme? (6 pont)

b) Adott a következő sorozat:

$$a_1 = 1; \quad a_{n+1} = 3 \cdot a_n + 1 \quad (n \geq 1).$$

Adjuk meg a sorozat 2020-adik tagját.

(7 pont)

II. rész

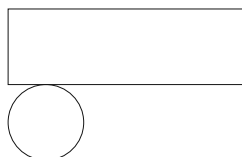
5. a) Legyen a és b nemnegatív valós szám. Bizonyítsuk be, hogy

$$0 \leq \frac{(a+1)(b+1)}{a^2 + b^2 + 2} \leq 1.$$

Írhatunk-e a nulla helyett nála nagyobb számot?

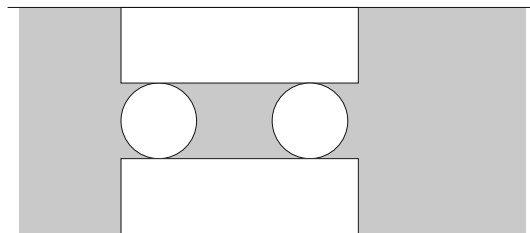
(9 pont)

b) Egy felül nyitott fémdobozt lemezből állítunk elő úgy, hogy az 1. ábrán látható módon kivágunk, majd összehajtogatunk egy ilyen alakot.



1. ábra

A kivágást egy 30 cm-es széles fémszalagból végezzük úgy, hogy 2 ilyen mintát fordítunk egymással szembe a 2. ábra szerint.



2. ábra

Hogyan válasszuk meg a méreteket, hogy a kikerülő fémdoboz a lehető legnagyobb térfogatú legyen?

(7 pont)

6. a) Adjuk meg annak az egyenesnek az egyenletét, mely egyidejűleg érintik az $y = x^2$ és $y = -x^2 + 4x - 2$ parabolákat.

(9 pont)

b) A magyar GúgLi Kft. egy emblémát tervez a székházuk elé, amely egy félbevágott gömb és egy kúp összetételéből áll. Az emblémának függőlegesen a negyede ki van vágva úgy, hogy a két vágósík az embléma függőleges tengelye mentén metszi egymást. Az embléma keresztmetszete és a függőleges metszete az ábrán látható.

A kúp magassága éppen a félbevágott gömb sugarának a kétszerese. Betonból szeretnék elkészíttetni majd lefesteni a 1,5 m magasságúra tervezett emblémát.

– Mennyi beton szükséges az elkészítéséhez, ha az elkészítés folyamán 15% veszteséggel számolhatunk?

– Mekkora lesz az elkészült embléma tömege?

– Hány m^2 -re elegendő festéket kell beszerezniük, ha az időjárás ellen háromszor szeretnék lefesteni és a festés során keletkező veszteség 5%?

(7 pont)

7. a) 18 tudós e-mail segítségével tartja a kapcsolatot a világban. Bármely két tudós egymással angol, német vagy orosz nyelven levelezik, mindig ugyanazt a nyelvet használják egymás között. Tudjuk, hogy nincs három olyan tudós, aki egymás között angol, vagy orosz nyelvet használ. Bizonyítsuk be, hogy létezik közöttük három, akik egymással németül leveleznek.

(9 pont)

b) Aladár négyjegyű számokat ír fel egy papírlapra, melyek csak az 1; 2; 3 és 4 számjegyeket tartalmazhatják (lehet ismétlődés, nem kell minden számjegyet felhasználni minden négyjegyű számban). Figyel arra, hogy 1-es után csak 4-es, páros számjegy után csak páratlan jegy következhet. Hányféle számot tud leírni így?

(7 pont)

8. a) Oldjuk meg a következő egyenletet a pozitív egészek halmazán:

$$2 \cdot (x; y) + 17 \cdot [x; y] = 257,$$

ahol a „kerek” zárójel a két szám legnagyobb közös osztóját, a „szögletes” zárójel pedig a legkisebb közös többszörösét jelöli.

(9 pont)

b) Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalai 2 és 14, szárjai 10 egység hosszúak. Meghúzzuk a belső szögeinek szögfelezőjét, amelyek egy négyszöget zárnak be. Amennyiben ennek a négyszögnek létezik a beírt és körülírt köre, mekkora ezen körök sugara?

(7 pont)

9.

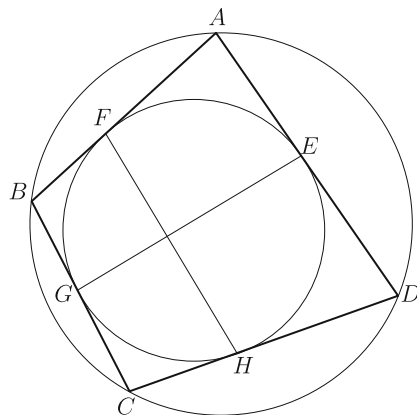
a) Bizonyítsuk be, hogy

$$\begin{aligned} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1) &= \\ &= \frac{n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2)}{3}, \end{aligned}$$

ahol $n \in \mathbb{N}^+$.

(8 pont)

b) Adott egy olyan húrnégyszög, ami egyben érintőnégyszög is.



Az *ábrán* jelöltük az érintési pontokat. Bizonyítsuk be, hogy az EG és FH szakaszok merőlegesek egymásra.
(8 pont)