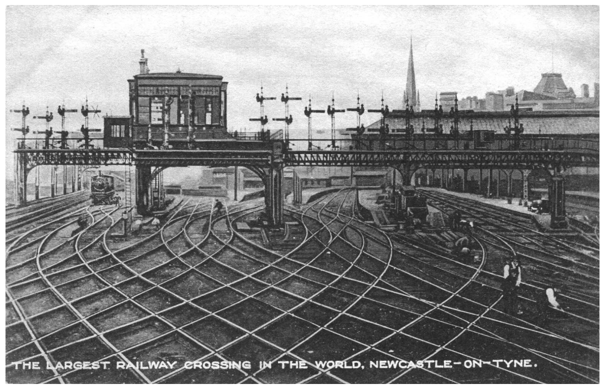
Állandó távolságú görbepárok

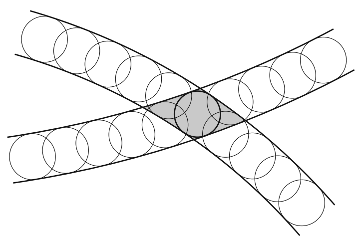
Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

Vasúti sínek és beírt körök



A Newcastle-i központi vasútállomás sínei egy 1910-es képeslapon

A vasúti sínpárokat jól ismerjük: két olyan görbéből állnak, amelyek távolsága egy előre rögzített d állandó, a sínpár *nyomtávja*. Úgy is mondhatjuk, hogy a vasútvonal bármelyik pontján a két sín közé d átmérőjű kört lehet írni.



1. ábra

Ahol két sínpár keresztezi egymást, ott a kereszteződésben egy közelítőleg rombusz alakú terület jön létre, ezért az ilyen helyeket, az osztott pályás autóutak kereszteződéseihez hasonlóan, *gyémánt-kereszteződésnek* (angolul: *diamond-crossing*) is hívják. A kereszteződésben a két sínpár közé írt körseregeknek egy közös elemét fedezhetjük fel: a „rombuszba” beírt kört, amely mind a négy síngörbét érinti (*1. ábra*).

Látni fogjuk, hogy ebből a gondolatból milyen sokféle feladatot lehet gyártani; az előző részben látott olimpiai feladatjavaslatnak is van ilyen hangulatú megoldása. Ehhez most kivételesen nem három dimenzióba, hanem egy nem-euklideszi geometriai modellbe, a Poincaré-féle félsíkmodellbe fogunk átlépni, és ott keresünk állandó távolságú görbepárokat és ilyenek kereszteződéseit.

A Poincaré-féle félsíkmodell

A félsíkmodell inverzióval kapható a Poincaré-féle körmodellből; szintén a hiperbolikus sík egy modellje, ha tetszik, egy képe az euklideszi síkon belül. A „pontok” egy félsík belső pontjai. A modellt mindig úgy fogom lerajzolni, hogy a határa egy vízszintes egyenes, és az egyenes fölötti félsík lesz maga a modell.

Az „egyenesek” a félsík határára merőleges félkörök és félegyenesek. A félegyeneseket tekinthetjük a félkör határhelyzetének; ha a síkot kiegészítjük egy végtelen távoli ponttal, amely az összes egyenes közös végpontja (vagyis a modellt az inverzív síkon helyezzük el), ez az ideális pont lesz a félegyenesnek látszó „egyenesek” másik vége.

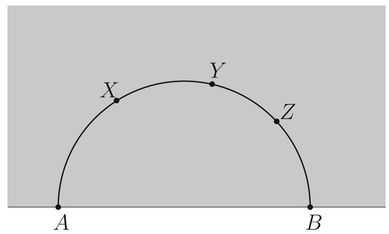
Máris látjuk, hogy a különféle geometriai alakzatok és mennyiségek a modellen belül nem ugyanazok, mint aminek kívülről látszanak. A hiperbolikus „sík” félsíknak látszik, az „egyenesek” pedig félkörnek vagy félegyenesnek. Azért, hogy a félreérthetőséget elkerüljük, a modellbeli dolgokat a későbbiekben is idézőjelbe fogom tenni, és helyenként a „hiperbolikus” jelzőt is használni fogom. A kívülről látható dolgok nem lesznek idézőjelben, és időnként a „látszólagos” jelzővel is hangsúlyozni fogom, hogy csak látszatról van szó.

[1]A cikksorozat a Rényi Intézet és a Sztaki támogatásával készült.

Két „pont” „távolságát” ugyanazzal a képlettel definiáljuk, mint a körmodellben: ha X és Y két pont a határegyenesre merőleges AB félkörön (*2.a ábra*), akkor a „távolságuk”

$$(1a)\qquad d(X,Y) = k \cdot \left|\ln(ABXY)\right| = k \cdot \left|\ln \frac{AX \cdot YB}{AY \cdot XB}\right|,$$

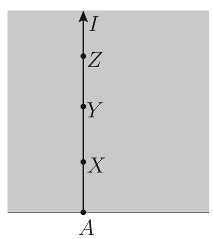
ahol k egy rögzített pozitív szám, a hiperbolikus geometria paramétere.



2. a ábra

Ha X és Y az A végpontú, a határra merőleges félegyenesen van (*2.b ábra*), akkor a félegyenes másik vége az I ideális pont, és $\dfrac{YI}{XI} = 1$; tehát a „távolság”

$$(1b)\qquad d(X,Y) = k \cdot \left|\ln(AIXY)\right| = k \cdot \left|\ln \frac{AX}{AY}\right|.$$



2. b ábra

A képletekben a logaritmus előjele attól függ, hogy a négy pont sorrendje A, X, Y, B (a logaritmus értéke negatív) vagy pedig A, Y, X, B (pozitív); ahol lehet, megpróbáljuk a pontokat úgy elhelyezni, hogy ne legyen szükség az abszolútérték-jelre.

Érdemes ellenőrizni, hogy ez a távolság-képlet szimmetrikus, vagyis $d(X,Y) = d(Y,X)$, és additív is: ha X, Y, Z ebben a sorrendben három pont ugyanazon az „egyenesen”, akkor $d(X,Y) + d(Y,Z) = d(X,Z)$.

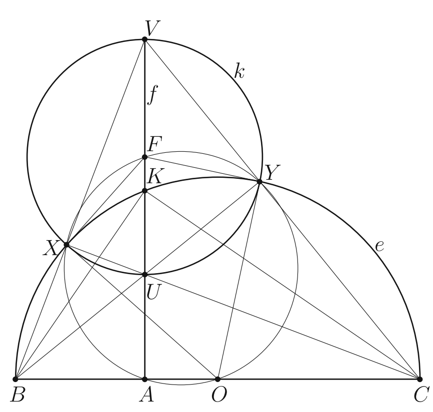
Végül definiáljuk a szögeket: két „egyenes” „szöge” a félsíkmodellben is éppen akkora, mint amekkorának látszik.

Körök és sugaraik

A félsíkmodellben a „körök” a félsík belsejében fekvő körvonalak, ezt most ellenőrizni fogjuk.

Vizsgáljunk meg egy tetszőleges k kört a félsíkban, amely szimmetrikus a határra merőleges f félegyenesre; az f kezdőpontját jelöljük A-val, és a k-val vett metszéspontjai legyenek U és V. A kör látszólagos középpontja az UV szakasz F felezőpontja, de a kör „középpontja” nem ez, hanem az UV szakasznak az a K pontja, amelyre $d(U,K) = d(K,V)$; az (1b) definíciót beírva $\dfrac{AK}{AU} = \dfrac{AV}{AK}$, vagyis $AK^2 = AU \cdot AV$.

Rajzoljunk a K ponton keresztül egy tetszőleges újabb e „egyenest”, vagyis félkört, amelynek végpontjai B és C, metszéspontjai a k körrel X és Y a *3. ábra* szerint.



3. ábra

Azt szeretnénk ellenőrizni, hogy e merőlegesen metszi k-t, és az U, V, X, Y pontok ugyanakkora „távolságban” vannak a K ponttól, azaz $d(K,U)=d(K,V)=d(K,X)=d(K,Y)$. Azt már biztosítottuk, hogy $d(K,U)=d(K,V)$ teljesüljön.

Először megmutatjuk, hogy a BV és a CU egyenes átmegy az X, míg a BU és a CV egyenes átmegy az Y ponton.

A Thalész-tétel miatt a BCK háromszög derékszögű; a magasságtétel szerint $AB\cdot AC=AK^2$. A K pont definíciója szerint $AK^2=AU\cdot AV$, tehát $AB\cdot AC=AU\cdot AV$, vagy átrendezve $\dfrac{AB}{AV}=\dfrac{AU}{AC}$. Ezért az AVB és ACU derékszögű háromszögek hasonlók, és egy A körüli, 90°-os szögű forgatva nyújtással vihetők át egymásba. A 90°-os forgatás miatt az átfogóik, a BV és a CU egyenesek merőlegesek. A Thalész-tétel megfordítása miatt a BV és a CU egyenesek metszéspontja a k és e körön is rajta van, vagyis ez a metszéspont éppen az X pont. Ugyanígy láthatjuk, hogy a BU és CV egyenesek metszéspontja Y.

A BCV háromszögben BY, CX és VA a magasságok, U a magasságpont. Jelölje O a BC szakasz felezőpontját, amely egyben az e kör középpontja is. Az A, O, X, Y, F pontok a háromszög Feuerbach-körén vannak; mivel $OAF\sphericalangle=90^\circ$, az OF szakasz a Feuerbach-körnek átmérője; ezért $OXF\sphericalangle=OYF\sphericalangle=90^\circ$. Más szóval, a k kör FX és FY sugarai merőlegesek az e kör OX, illetve OY sugaraira; a k és az e kör tényleg merőlegesen metszi egymást.

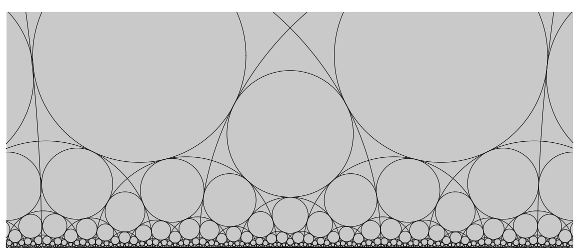
A $d(K,X)$ ellenőrzéséhez azt használjuk fel, hogy a BCK háromszög hasonló a BKA, a BCX pedig hasonló a BVA háromszöghöz:

$$\frac{BK\cdot XC}{BX\cdot KC}=\frac{BK}{KC}\cdot\frac{XC}{BX}=\frac{BA}{AK}\cdot\frac{AV}{BA}=\frac{AV}{AK};$$
$$d(K,X)=k\cdot\ln\frac{BK\cdot XC}{BX\cdot KC}=k\cdot\ln\frac{AV}{AK}=d(K,V).$$

A B, C és X, Y pontok szerepének felcserélésével ugyanígy igazolható, hogy $d(K,Y)=d(K,V)$.

Az $(1a)$, $(1b)$ távolság-definíciók következménye, hogy a körívnek vagy éppen szakasznak látszó „szakaszok” hiperbolikus hossza csupán a modell határától mért távolságok arányától függ; ha a félsíkmodellt felnagyítjuk, vagy lekicsinyítjük, ugyanezt a modellt kapjuk vissza.

A *4. ábrán* újra lerajzoltam az előző részben már látott csempézést, de most a félsíkmodellben: a csempék olyan egybevágó szabályos ötszögek, amelyeknek mindegyik szöge derékszög, és a beírt körük is „ugyanakkora”, csak a határhoz közelebbi köröket arányosan kisebbnek kell rajzolnunk.



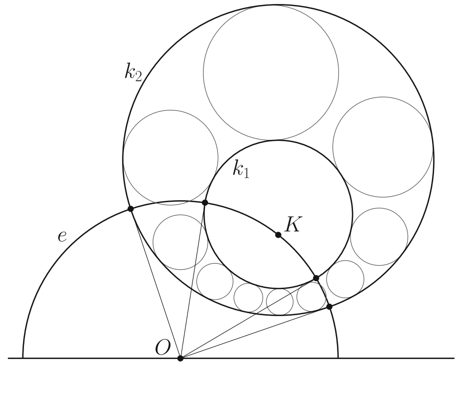
4. ábra

Állandó távolságú görbepárok a félsíkmodellben

Ahogy ígértem, vonatsíneket fogunk keresni a félsíkmodellben.

Koncentrikus körök

Az euklideszi geometriában megszokott párhuzamos egyenespárok itt nem léteznek; a legkézenfekvőbb példa állandó távolságú görbepárra két „koncentrikus” „kör”. A „koncentrikust” természetesen úgy értjük, hogy a két „kör” hiperbolikus „középpontja” ugyanaz. Az *5. ábrán* a k_1 és a k_2 kör közös „középpontja” a K pont, és a mindkettőt érintő körök „ugyanakkorák”.



5. ábra

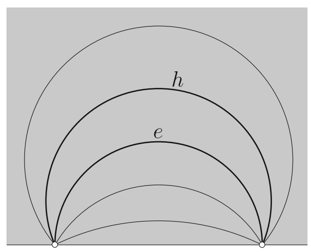
Tekintsünk egy tetszőleges, K-n átmenő e „egyenest”, amely a modellben egy O középpontú félkörnek látszik. Az e „egyenes” mindkét kört merőlegesen metszi, ezért az O pontot a metszéspontokkal összekötő szakaszok érintik a köröket. Ezek a szakaszok az e félkörnek sugarai, tehát egyenlő hosszúak; emiatt az O pont hatványa a két körvonalra ugyanakkora. Ebből láthatjuk, hogy a „koncentrikus” körök hatványvonala a félsíkmodell határegyenese.

Hiperciklusok

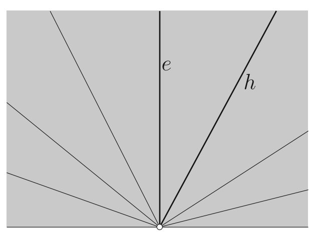
Ha egy e „egyenes” két végét egy (a félkörtől különböző) h körívvel összekötjük, egy nagyon érdekes görbét kapunk a hiperbolikus geometriánkban. Ennek a h görbének minden pontja ugyanakkora „távolságban” van az e-től. Ezért szokták a h görbét „távolsággörbének” is nevezni; mi az elterjedtebb „hiperciklus” nevet fogjuk használni.

Ha ugyanazzal a két végponttal nem egy, hanem két hiperciklust rajzolunk, akkor az e-től mért „távolságokat” egyszerűen összeadhatjuk vagy kivonhatjuk (attól függően, hogy az e-nek ugyanazon vagy pedig ellentétes oldalán vannak), ezért a két hiperciklus „távolsága” is állandó.

A *6.a* és a *6.b ábrán* közös végpontú hiperciklusokat és „egyeneseket” rajzoltam: a *6.b ábrán* az egyik közös végpont az ideális pont. Vegyük észre, hogy a 6.a ábrán a hiperciklusoknak megfelelő körívek hatványvonala ezúttal is a félsíkmodell határa.



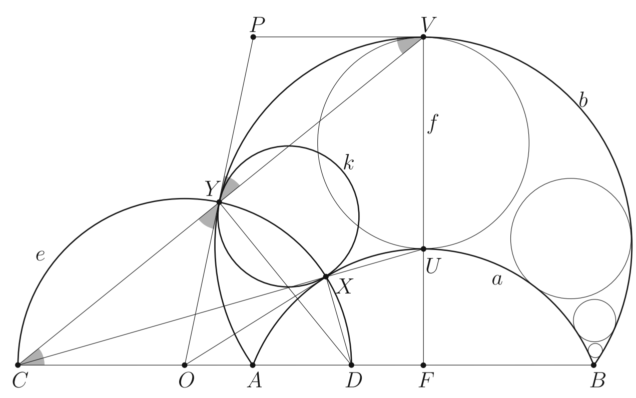
6. a ábra



6. b ábra

A szakirodalom az egyeneseket, vagyis az egyenesektől nulla távolságban haladó görbéket nem nevezi „hiperciklusnak”. Mi viszont csupa olyan állítást fogunk megfogalmazni, amelyek hiperciklusokra és egyenesekre is érvényesek, ezért mindenhol azt kellene írnunk, hogy „hiperciklus vagy egyenes”. (Pl. *„Két, közös végpontú hiperciklus vagy egyenes távolsága állandó”.*) Helyette inkább a „hiperciklus” fogalmába speciális esetként az egyeneseket is bele fogjuk érteni.

Most ellenőrizzük, hogy két, azonos végpontú hiperciklus (vagy „egyenes”) „távolsága” tényleg állandó, és a közéjük írható körök „ugyanakkorák”. Legyen a és b két hiperciklus, amelyek közös végpontjai A és B. Az AB szakasz felezőmerőlegese legyen f, jelölje f metszéspontját a-val, b-vel és az AB egyenessel rendre U, V, illetve F. Az a-ra egy tetszőleges X pontjában állítsunk egy merőleges e „egyenest”, ennek végpontjai legyenek C és D, metszéspontja b-vel Y, és az e félkör középpontja legyen O. Azt fogjuk igazolni, hogy e és b is merőlegesen metszik egymást, létezik egy k kör, amely az X és Y pontokban érinti az a, illetve a b görbét, és $d(X,Y) = d(U,V)$ (*7. ábra*).



7. ábra

Az O pontnak az a körívre vonatkozó hatványából kapjuk, hogy $OY^2 = OX^2 = OA \cdot OB$, így az e félkör OY sugara érinti b-t. Tehát az e „egyenes” a b hiperciklust is merőlegesen metszi. Az a k kör, amely az X és Y pontokban érinti az OX és OY szakaszokat, érinti az a és b görbéket is.

Szükségünk lesz arra, hogy a C, X, U pontok, illetve a C, Y, V pontok is egy egyenesre esnek. Legyen P az OY egyenes és a b körív V-beli érintőjének metszéspontja; mivel V a b felezőpontja, a PV egyenes párhuzamos az AB egyenessel. Az OYC és a PYV háromszög is egyenlő szárú, így $OYC\sphericalangle = YCO\sphericalangle = YVP\sphericalangle = PYV\sphericalangle$; ez mutatja, hogy a CY és az YV szakasz egymás meghosszabbítása. Ugyanígy igazolhatjuk, hogy C, X és U egy egyenesen van.

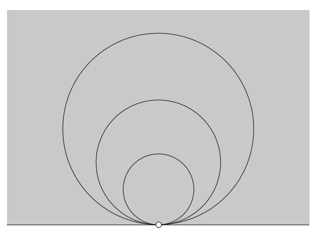
A CDX és a CUF derékszögű háromszögek, továbbá a CDY és a CVF derékszögű háromszögek is hasonlók, ezért

$$\frac{CX \cdot YD}{CY \cdot XD} = \frac{CX}{XD} \cdot \frac{YD}{CY} = \frac{CF}{FU} \cdot \frac{FV}{CF} = \frac{FV}{FU};$$
$$d(X,Y) = k \cdot \ln \frac{CX \cdot YD}{CY \cdot XD} = k \cdot \ln \frac{FV}{FV} = d(U,V).$$

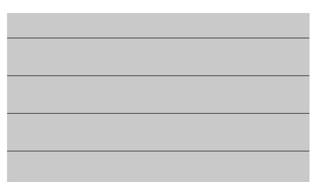
Ez mutatja, hogy bármelyik X pontban „ugyanakkora” kört lehet a két hiperciklus közé írni.

Horociklusok

A horociklusok (más néven paraciklusok) olyan, a félsíkmodellben körvonalnak vagy egyenesnek látszó görbék, amelyeknek egyetlen pontjuk van a modell határán; más szóval, a határegyenest érintő körvonalak (*8.a ábra*), és a határegyenessel párhuzamos egyenesek (*8.b ábra*). A 8.a ábrán megfigyelhetjük, hogy a közös végpontú horociklusoknak megfelelő körvonalak hatványvonala a közös érintő, vagyis ismét csak a félsíkmodell határegyenese.

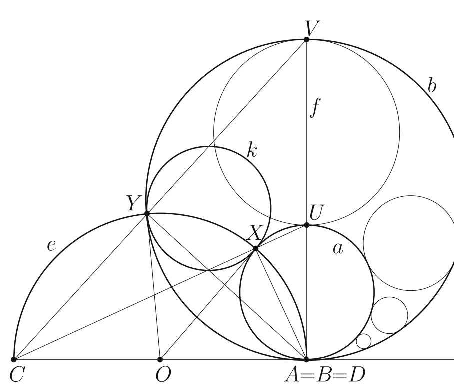


8. a ábra



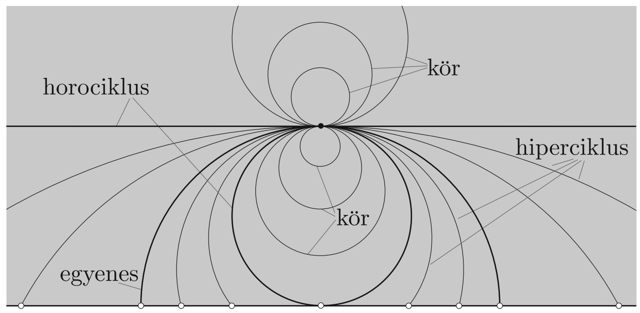
8. b ábra

A közös végpontú horocikluspárokra is igaz, hogy a „távolságuk” állandó, avagy a közéjük írt körök „ugyanakkorák”. Ennek igazolása a hiperciklusokra elmondott gondolatmenet leegyszerűsítésével történhet: a különbség annyi, hogy az A, B, D pontok egybeesnek (*9. ábra*). Ennek részletes végiggondolását az Olvasóra hagyjuk.



9. ábra

A sokféle, körvonalnak látszó görbét egy közös rajzon mutatja a *10. ábra:*



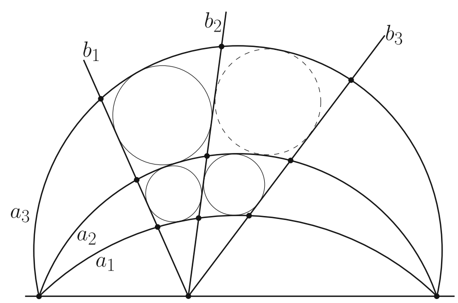
10. ábra

Érintő körös feladatok

A kimerítő előkészületek után nézzünk példákat arra, hogy sínpárok kereszteződéseiből hogyan lehet feladatokat készíteni.

Ali Khezeli megoldása az olimpiai feladatjavaslatra

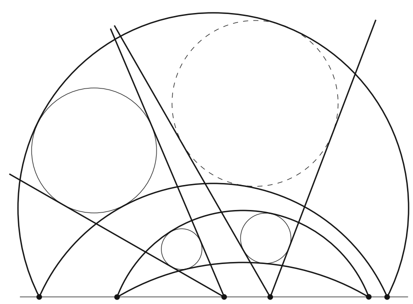
Az előző részben látott olimpiai feladat javaslatra (*11.a ábra*) az iráni csapat egyik megfigyelője, *Ali Khezeli* mutatta nekem a következő megoldást.



11. a ábra

Tekintsük a *11.a ábrát* egy félsíkmodellbeli rajznak. Az a_2 és a_3 hiperciklusok „távolsága” ugyanakkora, mint a b_1 és a b_2 hiperciklusok „távolsága”: a közös „távolság” a $b_1a_2b_2a_3$ tartományba írt kör „átmérője”. Ugyanígy, az a_1 és a_2 hiperciklusok „távolsága” ugyanakkora, mint a b_1 és a b_2 hiperciklusok „távolsága”, továbbá az a_1 és a_2 hiperciklusok „távolsága” is ugyanakkora, mint a b_2 és a b_3 hiperciklusok „távolsága”. Tehát az a_2 és a_3 hiperciklusok „távolsága” ugyanakkora, mint a b_2 és a b_3 hiperciklusok „távolsága”, ezért az $a_2b_2a_3b_3$ tartományba is kör írható.

A megoldás általánosabban is működik, például a *11.b ábrán* látható esetben.

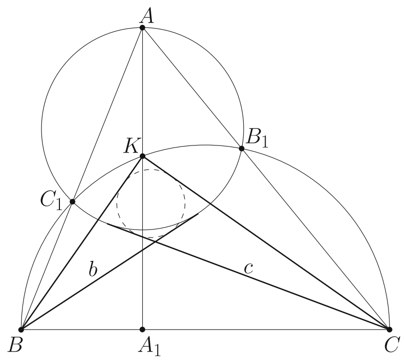


11. b ábra

Hiperciklusok egy kör középpontján keresztül

Eddig a különböző görbepárok távolságát a közéjük írt körök átmérőivel mértük meg. Megtehetjük azonban azt is, hogy egy körhöz csak egy érintő hiperciklust rajzolunk, a másik hiperciklus a kör középpontján megy át.

Legyen ABC hegyesszögű háromszög, a magasságai AA_1, BB_1 és CC_1, az AA_1 magasság és a BC_1B_1C félkör metszéspontja K. Húzzunk a B és a C pontból érintőket az AB_1C_1 körhöz a háromszög belsejében, az érintő félegyenesek legyenek b és c (*12. ábra*).

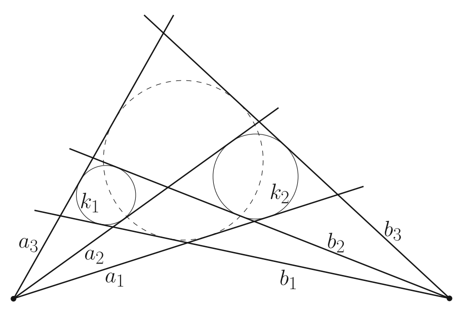


12. ábra

Ezeket a köröket és a K pontot már ismerjük a 3. ábráról: az A_1A és a BC hiperbolikus „egyenes" is merőlegesen metszi az AB_1C_1 kört, ezért K a kör „középpontja". A BK és a b hiperciklus „távolsága", valamint a CK és a c hiperciklus „távolsága" is az AB_1C_1 kör „sugara". Ezért a két hipercikluspár közé közös érintő kört lehet írni.

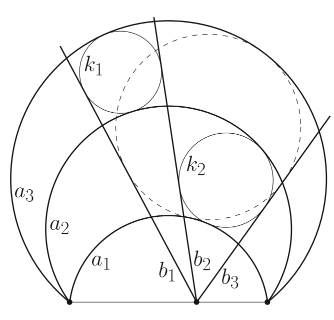
Távolságok összeadása

Ha ugyanazokkal a végpontokkal nem két, hanem három hiperciklust rajzolunk, a közöttük mért „távolságokat" összeadhatjuk. A *13.a ábrán* az a_1 és a_2 hiperciklusok „távolsága" a közéjük írt k_2 kör „átmérője", míg az a_2 és a_3 „távolsága" a k_1 „átmérője"; az a_1 és a_3 közötti „távolság" a kettő összege.



13. a ábra

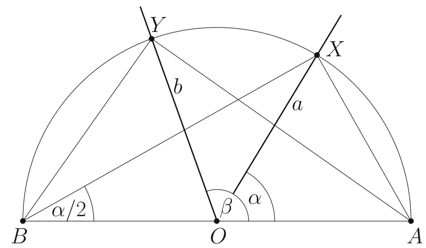
Ugyanezt az összeget kapjuk a b_1 és b_3 közötti „távolságra" (csak fordított sorrendben), tehát az $a_1b_3a_3b_1$ négyszögbe is kört lehet írni. Ugyanez elmondható a *13.b ábrán* is.



13. b ábra

Érintőnégyszögek egy jellemzése

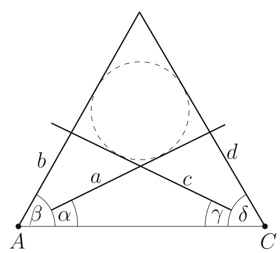
A félegyenesnek látszó hiperciklusok „távolsága” könnyen felírható szögekkel. Legyen a és b két hiperciklus, amelyek egyik végpontja O, a másik végpont az ideális pont, és metsszük el ezeket egy O középpontú félkörrel a *14.a ábra* szerint.



14. a ábra

Az ábrán feltüntetett szögekkel, feltéve, hogy $\alpha < \beta$, az OXB egyenlő szárú háromszögből azt kapjuk, hogy $ABX\sphericalangle = \frac{1}{2}AOX\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}$, ezért $\frac{AX}{XB} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, és hasonlóan $\frac{AY}{YB} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. Tehát az a és a b hiperciklus közötti „távolság”

$$d(X,Y) = k \cdot \ln\frac{AY \cdot XB}{AX \cdot YB} = k \cdot \ln\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

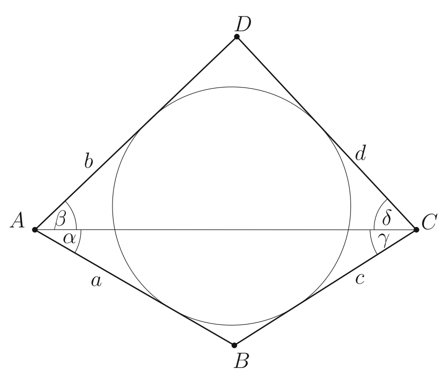


14. b ábra

Most tekintsünk két félegyenes-párt, az a, b és c, d hiperciklusokat a *14.b ábra* szerint. A közös érintő kör akkor és csak akkor létezik, ha az a és b „távolsága” megegyezik c és d „távolságával”, vagyis

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

A feltétel akkor is érvényes marad, ha az a és a c félegyenest az AC egyenes másik oldalára rajzoljuk (*15a. ábra*).



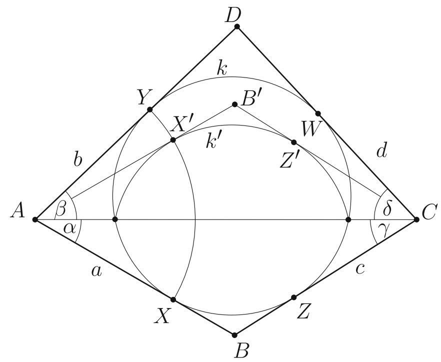
15. a ábra

Az érintőnégyszögeknek ezt a tulajdonságát érdemes külön is kimondani és megtanulni:

Lemma. *Legyen az $ABCD$ konvex négyszögben $\alpha = CAB\sphericalangle$, $\beta = DAC\sphericalangle$, $\gamma = BCA\sphericalangle$ és $\delta = ACD\sphericalangle$. Az $ABCD$ négyszög akkor és csak akkor érintőnégyszög, ha*

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

A Lemma bizonyítását kezdjük a „csak akkor” iránnyal; tegyük fel, hogy $ABCD$ érintőnégyszög, a beírt köre k, az érintési pontok X, Y, Z és W a *15.b ábra* szerint. Az általánosság csorbulása nélkül feltehetjük, hogy $\beta \geq \alpha$.



15. b ábra

Tükrözzük az AC átlóra a B, X, Z pontokat és a k körnek az ABC háromszögbe eső ívét; a tükörképeket jelölje rendre B', X', Z', illetve k'. Az A pontból a k-hoz és k'-höz húzott érintők egyenlők, ezért az $XX'Y$ kör középpontja A. Ha az AC egyenesnek a D-vel azonos oldalát a félsíkmodellnek tekintjük, akkor a k és k' hiperciklusok „távolsága"

$$d(X',Y) = k \cdot \ln \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Ugyanezt az A helyett a C ponttal is elmondhatjuk, és a k és k' hiperciklusok „távolságára" így azt kapjuk, hogy

$$d(Z',W) = k \cdot \ln \frac{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

A kétféle képlet összehasonlításából

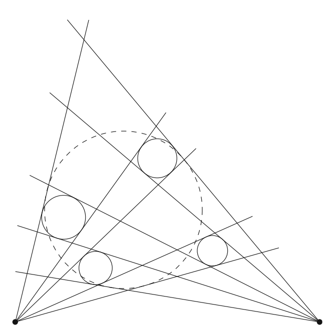
$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

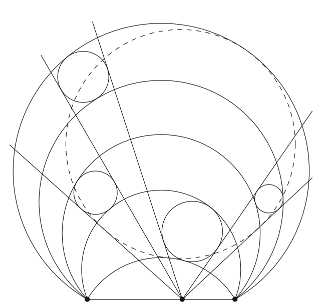
A megfordításhoz most tegyük fel, hogy $ABCD$ nem érintőnégyszög. Vegyük fel az AD félegyenesen azt a D_0 pontot, amelyre $ABCD_0$ érintőnégyszög, és legyen $\delta_0 = ACD_0\sphericalangle \neq \delta$. Az előbbiek szerint

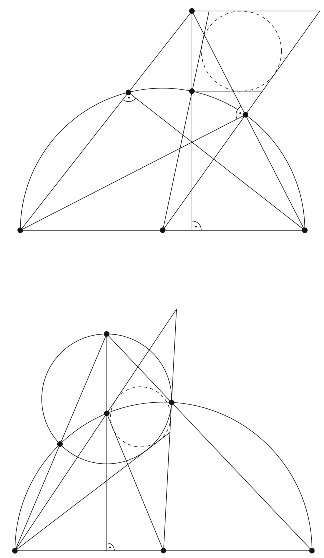
$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\delta_0}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} \neq \frac{\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

Feladatok

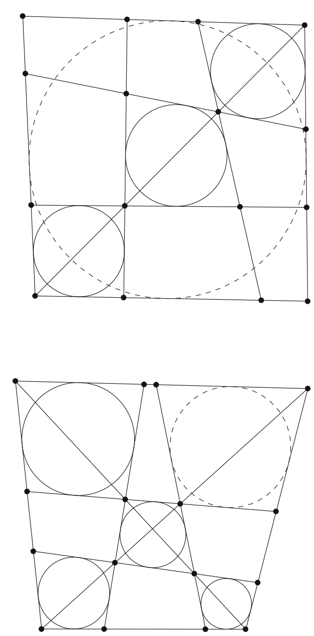
1. Feladatok szöveg nélkül:







KöMaL A. 621., 2014/9



IZhO 2014/4; Nairi Sedrakyan feladata

2. Az $ABCD$ konvex érintőnégyszögbe írt kör középpontja I. Az AB és a DC félegyenes az F pontban, az AD és a BC félegyenes a G pontban metszi egymást. Legyen $\mathcal{E}$ az a F, G fókuszú ellipszis, amely átmegy a B és D pontokon, és legyen $\mathcal{H}$ az a F, G fókuszú hiperbolaág, amely átmegy az A és C pontokon. Az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{H}$ metszéspontjait jelölje P és Q. Mutassuk meg, hogy a P, Q és I pontok egy egyenesen vannak. (KöMaL A. 630., 2014. december)

3. Adott az $OA_1A_2A_3$ tetraéder mindegyik OA_i élén egy B_i belső pont, az OA_i él A_i-n túli meghosszabbításán pedig egy C_i pont ($i = 1, 2, 3$). Tegyük fel, hogy az $OA_{i+1}A_{i+2}$ és $B_iA_{i+1}A_{i+2}$ síkok által határolt hat lapú testbe, továbbá az $B_iA_{i+1}A_{i+2}$ és $C_iA_{i+1}A_{i+2}$ síkok által határolt testbe is egy-egy gömböt lehet írni. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $OA_{i+1}A_{i+2}$ és $C_iA_{i+1}A_{i+2}$ síkok által határolt testbe is gömböt lehet írni. (KöMaL A. 547., 2011. november)