Ebben a rovatban havonta tíz-tíz olyan érdekes – könnyebb vagy nehezebb – feladatot mondunk el, amelyek előkészítőül szolgálnak a Matematikai Diákolimpiára. Olvasóink ne küldjék be megoldásaikat, mert a megoldásokat nem ismertetjük. Esetleges kérdéseikkel forduljanak a szerkesztőséghez, ezekre írásban válaszolunk.

1. Egy kör MA, MB, MC húrjai mint átmérők fölé köröket írunk. Bizonyítsuk be, hogy e körök második metszéspontjai egy egyenesen vannak.

2. Egy háromszög köré írt kör középpontja O, sugara r. Párhuzamosokat húzunk O-n keresztül az oldalakkal, ezek a további két oldalt rendre az A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy

$$A_1O \cdot OA_2 + B_1O \cdot OB_2 + C_1O \cdot OC_2 = r^2.$$

3. Adott a térben három kitérő egyenes. Határozzuk meg a legkisebb kerületű olyan háromszöget, amelynek csúcsai rendre a megadott egyeneseken vannak.

4. Egy síkban adva van 100 pont, semelyik három nem esik egy egyenesbe. A pontok által meghatározott szakaszok mellé $+1$-et vagy -1-et írunk. Egy háromszög, melynek csúcsai az adott pontok közül valók, negatív, ha ha az oldalaihoz írt számok szorzata -1. Bizonyítsuk be, hogy a negatív háromszögek száma páros.

5. Fel lehet-e darabolni egy négyzetet csupa konkáv négyszögre?

6. Egy konvex sokszög olyan, hogy nem helyezhető el benne 1 területű háromszög. Bizonyítsuk be, hogy ekkor a sokszög lefedhető egy 4 területű háromszöggel!

7. *a)* Egy egyenesen adott p-nél több szakasz. Tudjuk, hogy bármely p szakasz között van q olyan, melyeknek van közös pontjuk. Mutassuk meg, hogy ekkor kijelölhető az egyenesen $p-q+1$ pont úgy, hogy a szakaszok mindegyike e pontok közül legalább egyet tartalmazzon.

b) Egy körön adott p-nél több körív. Tudjuk, hogy bármely p körív között van q olyan, melyeknek van közös pontjuk. Mutassuk meg, hogy ekkor kijelölhető a körön $p-q+2$ pont úgy, hogy az ívek mindegyike e pontok közül legalább egyet tartalmazzon.

8. Milyen $n \times m$-es sakktáblák fedhetők le 4×1-es dominókkal?

9. Az $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ pozitív számok összegét jelöljük s-sel. Mutassuk meg, hogy

$$\left(a_1 + \frac{1}{a_1}\right)^2 + \cdots + \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 \geq n\left(\frac{n}{s} + \frac{s}{n}\right)^2.$$

10. Legyen $n > 2$ pozitív egész, és tekintsük mindazokat a $0 < p < q \leq n$ egészeket, amelyekre $(p,q) = 1$ és $p + q > n$. Az összes ilyen párra adjuk össze az $1/pq$ törteket. Mennyi lesz az összeg?