(Rovatvezető: Ada-Winter Péter)

A KÖMAL 1979/2. számában kitűzött SZ9 jelű feladat megoldása

A kitűzött feladat szövege az alábbi volt:

Egy vegyi üzem négyféle alapanyagból háromféle terméket állít elő. Az alábbi táblázat azt mutatja, hogy az egyes termékek egy kilogrammnyi mennyiségéhez hány kilogramm alapanyag felhasználása szükséges.

Termék\Alapanyag	A	B	C	D
1.	0,4	0,4	0,0	0,8
2.	0,2	0,2	0,7	0,6
3.	0,1	0,8	0,5	0,4

Az alapanyagok árát és a naponta beszerezhető maximális nyersanyagmennyiséget az alábbi táblázatban látjuk:

	A	B	C	D
Ft/kg	0,72	0,13	1,5	0,85
Nap/kg	1000	1000	600	800

Mennyit kell termelni naponként az egyes termékekből ahhoz, hogy a nyersanyag-felhasználás összköltsége maximális legyen?

Megoldás: A táblázatból kiszámítható a háromféle termék egy-egy kg-jához szükséges nyersanyagok ára. Így pl. az 1. termékre:

$$0{,}4\cdot 0{,}72+0{,}4\cdot 0{,}13+0{,}8\cdot 0{,}85=1{,}02\ \mathrm{Ft/kg}.$$

Hasonlóan a második termékre 1,73 és a 3. termékre 1,266 Ft/kg adódik. Ennek alapján az összes felhasznált nyersanyag árát a

$$z=1{,}02x_1+1{,}73x_2+1{,}266x_3$$

kifejezés adja meg, ahol x_1, x_2 és x_3 a termelt termékek kg-ban kifejezett mennyisége. Ha z-t mint e változók függvényét tekintjük, akkor a feladat olyan termékmennyiségek keresése, amelyek z-nek maximális értékét adják. Ezt nevezzük *optimális megoldás*nak. Minden egyéb megoldást lehetséges megoldásnak nevezünk. Készítsük el az alábbi táblázatot, és próbáljuk egy lehetséges megoldás adataival kitölteni.

1. táblázat

Termék / Anyag	x_1	x_2	x_3	Korlát	Felhasznált	Megmaradt
A				1000		
B				1000		
C				600		
D				800		
Készült termék						
Egységár						
z						

Mivel az x_1 termék C-ből nem használ, célszerű ezzel kezdeni a nyersanyag „kiosztását". Kezdjük tehát az x_2-vel. Tegyük erre a legszűkösebben rendelkezésre álló nyersanyag egész mennyiségét, 600 kg-ot. Ekkor x_2-ből $600:0{,}7=357{,}143$ kg termelhető, amihez viszont A-ból 171,429 kg, B-ből ugyanennyi, és D-ből 514,286 kg szükséges. Miután C-ből a teljes készlet elfogyott, a maradék anyagokból csak x_1 állítható elő. Ennek korlátot szab, hogy D-ből $800-514{,}286=285{,}714$ kg áll rendelkezésre, amiből (0,8-del osztva) 357,143 kg termék készülhet. Ehhez A-ból és B-ből egyenként 142,857 kg szükséges. A kapott adatokkal kitöltve a táblázatot, a 2. táblázat áll elő.

2. táblázat

Anyag \ Termék	x_1	x_2	x_3	Korlát	Felhasználás	Megmaradt
A	142,875	171,429	0	1000	314,286	685,714
B	142,875	171,429	0	1000	314,286	685,714
C	0	600	0	600	600	0
D	285,714	514,286	0	800	800	0
Készült	357,143	857,143	0			
Egységár	1,02	1,73	1,266			
z	1847,14					

Mármost ebből a lehetséges megoldásból kiindulva próbáljunk meg egy „jobb" megoldást csinálni. (Olyat, amelynél z értéke nagyobb.) Vizsgáljuk meg, hogy ha az x_2 termékből 1 kg-mal kevesebbet termelnénk, akkor – a felszabaduló nyersanyagot x_1-ben és x_3-ban felhasználva – magasabb lenne-e az összesen felhasznált nyersanyag ára. Ezt mutatja meg (az előzőhöz hasonló módon végigszámolva) a 3. táblázat.

3. táblázat

a \ t	x_1	x_2	x_3	Korlát	Fel-használt	Meg-maradt	Δ Fel-használt
A	142,877	171,229	0,14	1000	314,246	685,894	+0,04
B	142,877	171,229	1,12	1000	315,266	685,814	−0,94
C	0	599,3	0,7	600	600,0	0	0
D	285,754	513,686	0,56	800	800,0	0	0
Készül	357,193	856,143	1,4				
Egységár	1,02	1,73	1,266				
z	1847,24						
Δ kész.	+0,05	−1,0	+1,4				
z	+0,0934						

A rovatokban a táblázatban szereplő mennyiségeknek a 2.-beli megfelelő értékektől való előjeles eltérése áll. Ezekből a legfeltűnőbb az, hogy az x_2 mennyiségének 1 kg-mal való csökkentése az x_1-nek 0,05 kg-nyi és az x_3-nak 1,4 kg-nyi növekedésével jár együtt, ha a felszabaduló nyersanyagokat ezek termelésére fordítjuk.

Ennek megfelelően a z értéke is nő Könnyen belátható, hogy x_1 további csökkentésével a Δ-hoz tartozó mennyiségek lineárisan változnak. Ebből következik, hogy most már csak azt kell megállapítani, hogy x_2 termelését hány kg-mal csökkentsük a másik két termék javára. A csökkentésnek a B-hez tartozó korlát szab határt. Miután a 2. tábla szerinti maradék 685,714 kg, a 3-ban a megfelelő csökkenés 0,94, ezért ennek 729,48297-szerese fogyasztható még el. Ha most a 3-beli Δ értékeket ezzel az arányossági tényezővel szorozzuk és a 2-beli alapértékekhez hozzáadjuk, megkapjuk a 4. táblázatot, amelyet csak részben volt érdemes kitölteni. Belátható, hogy az ebben szereplő z a lehető legnagyobb, mivel bármilyen, a korlátok közt tartott termékmennyiség változtatása csak ronthat rajta.

4. táblázat

t / a	x_1	x_2	x_3	Korlát	Felhasználás	Megmaradt
A				1000	343,465	656,535
B				1000	1000	0
C				600	600	0
D				800	800	0
Készült	**393,617**	**127,660**	**1021,276**			
Egységár	**1,02**	**1,73**	**1,266**			
z	**1915,28**					

Feladatok

Sz. 9. (Újból kitűzve.) Oldjuk meg a feladatot Prékopa Andrásnak a KÖMAL 1979. 4-5. számaiban megjelent cikke alapján, vagy Csath Magdolna: Operációkutatás (1972. Számítástechnikai Oktató Központ) c. könyv 75.–98. old. alapján Adják meg a beküldők megoldásban, hogy melyik forrást használták fel segítségül.

Sz. 14. Program készítendő, mely legfeljebb 30 síkbeli koordinata-ponthoz kiszámítja, hogy melyek tartoznak e ponthalmazt burkoló konvex poligon csúcspontjaihoz, ill. a burokhoz, és melyek helyezkednek el a burkon belül. Input: $3 \leq n \leq 30$ az első kártyán, majd további n számú kártyán a koordináták, amelyeket F10.3 specifikációval kezelünk. Output: a beolvasott pontok, feliratkozva, külön listán a burkoló pontjai és külön a belsejében levő pontok listája.

Beküldési határidő: 1979. november 30.

A feladatmegoldások a következő címre küldhetők:
Ada-Winter Péter,
MÜM Számítástechnikai Intézet
Budapest, VIII.
Reguly Antal u. 57-59.
1089.