

Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n -re

$$(1) \quad \frac{|\sin n|}{n} + \frac{|\sin(n+1)|}{n+1} + \dots + \frac{|\sin 2n|}{2n} > \frac{1}{6}.$$

(A szinusz függvény argumentumát radiánokban mérjük.)

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy

$$(2) \quad |\sin \alpha| + |\sin(\alpha + 1)| \geq \sin 1$$

minden α -ra. Valóban, ha $\sin \alpha$ és $\sin(\alpha + 1)$ egyező előjelű, akkor (2) bal oldala

$$|\sin \alpha + \sin(\alpha + 1)| = 2 \left| \sin \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \right| \cos \frac{1}{2} \geq 2 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2},$$

hiszen valamilyen k egészre α és $\alpha + 1$ is a $[k\pi, (k+1)\pi]$ zárt intervallumba esik. Ha pedig $\sin \alpha$ és $\sin(\alpha + 1)$ különböző előjelű, akkor (2) bal oldalán

$$|\sin(\alpha + 1) - \sin \alpha| = 2 \sin \frac{1}{2} \left| \cos \left(\alpha + \frac{1}{2} \right) \right| \geq 2 \sin \frac{1}{2} \cos \frac{1}{2},$$

hiszen ekkor $k\pi - 1 \leq \alpha \leq k\pi$ valamilyen k egészre.

Az (1) egyenlőtlenség bal oldalát csökkentjük, ha a nevezőkben mindenütt $2n$ -et írunk, s mivel $(n+1)$ összeadandó szerepel, azért a közös nevezőre hozás után a számlálót $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil \geq \frac{n}{2}$ darab (2) típusú részletösszegre tudjuk bontani. Ezek alapján (1) bal oldala nagyobb, mint

$$\frac{1}{2n} \cdot \frac{n}{2} \cdot \sin 1 = \frac{\sin 1}{4} > \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} > \frac{1}{6},$$

és ezt akartuk belátni.