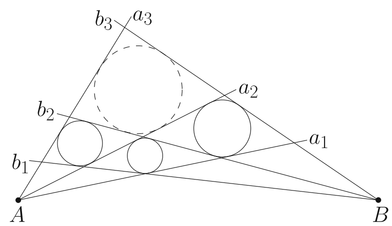
Egy olimpiai feladatjavaslat története

Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

Ez a rész egy kicsit személyesebb lesz. Egy feladatjavaslat történetét mesélem el, amit a 2010-es Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára (IMO) javasoltam.

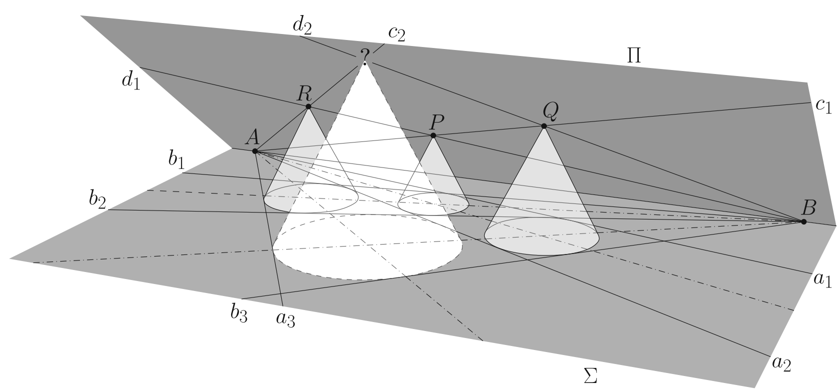
A kiinduló feladat

Két pontból indítsunk három-három félegyenest úgy, hogy bármelyik két, különböző pontból induló egyenes elmetssze egymást; ezek a félegyenesek négy négyszöget határoznak meg. Igazoljuk, hogy ha a négyszögek közül valamelyik három érintőnégyszög, akkor a negyedik is érintőnégyszög (1. ábra).



1. ábra

A feladatot sokféleképpen megoldhatjuk, például az előző részben bemutatott kúpokkal. Használjuk az 1. és a *2. ábra* jelöléseit; feltesszük, hogy az $a_1b_1a_2b_2$, az $a_1b_2a_2b_3$, valamint az $a_2b_1a_3b_2$, négyszögek érintőnégyszögek, és ebből fogjuk megmutatni, hogy az $a_2b_2a_3b_3$ négyszög is érintőnégyszög.



2. ábra

A tervünk az, hogy a Σ alapsíkunkból a térbe kilépbe, a négyszögekbe írt körökre egymáshoz hasonló kúpokat illesztünk, majd megszerkesztjük a negyedik kúpot. (A 2. ábrán olyan kúpokat rajzoltam, amelyek magassága kétszerese az alapkörük sugarának; a konkrét aránynak nincs jelentősége.)

Az olyan kúpoknak a csúcsai, amelyek alapköre érinti az a_1 és a_2 félegyeneseket, egy A-ból induló félegyenesen vannak; jelöljük ezt a félegyenest c_1-gyel. Hasonlóan, az a_2 és a_3 félegyeneseket, a b_1 és b_2 félegyeneseket, illetve a b_2 és b_3 félegyeneseket érintő körökre emelt kúpok csúcsai is egy-egy félegyenesen vannak; jelölje ezeket rendre c_2, d_1, illetve d_2 (2. ábra).

A c_1 és d_1 félegyenesek a P pontban, az $a_1b_1a_2b_2$ négyszögbe írt körhöz tartozó kúp csúcsában metszik egymást. Ugyanígy, a c_1 és d_2, illetve a c_2 és d_1 is metszik egymást a másik két kúp csúcsában, a Q és a P pontban. A feladat állításához elég azt igazolnunk, hogy a c_2 és a d_2 félegyenes is elmetszi egymást, ugyanis a metszéspontjuk egyértelműen meghatározza a negyedik kúpot, amelynek alapköre érinti az a_2, b_2, a_3, b_3 félegyenesek mindegyikét.

Legyen Π az ABP háromszög síkja. A Q pont a $c_1 = AP$ egyenesen, az R pont pedig a $d_1 = BP$ egyenesen van, tehát $Q, R \in \Pi$. Akkor viszont a $c_2 = AR$ és a $d_2 = BQ$ félegyenes is a Π síkban fekszik.

A c_2 és a d_2 félegyenesek Σ-ra való merőleges vetülete az a_2 és az a_3, illetve a b_2 és b_3 szögfelezője, ezek az $a_2b_2a_3b_3$ négyszög belsejében metszik egymást; a metszéspontjukat Σ-ra merőlegesen visszavetíthetjük Π-re, az így kapott pont c_2-nek és d_2-nek közös pontja, ami bizonyítja az állítást.

Valamikor 2009 őszén a 6-os villamoson kapaszkodva ezen a klasszikus feladaton gondolkodtam, akkor jöttem rá, hogy a bizonyítás hiperbolikus geometriában is elmondható, ha a kúpok hasonlósága helyett azt kötjük ki, hogy az alkotóik ugyanakkora szögben metszik az alapsíkot. Hazaérve megpróbáltam az észrevételből feladatot gyártani úgy, hogy lerajzoltam az ábrát a hiperbolikus sík egyik jól ismert modelljében, a Poincaré-féle körmodellben.

[1] A cikksorozat a Rényi Intézet és a Sztaki támogatásával készült.

A Poincaré-féle körmodell[2]

A hiperbolikus sík *modellje* azt jelenti, hogy bizonyos dolgokat elnevezünk „pontnak", pontok bizonyos halmazait „egyenesnek", definiáljuk a pontok sorrendjét az egyeneseken, pontok „távolságát" és egyenesek „szögét", és mindezt úgy, hogy az összes geometriai axiómánk teljesüljön, kivéve a párhuzamossági axiómát, ami helyett azt kötjük ki, hogy bármely egyeneshez bármely rajta kívül fekvő pontból végtelen sok párhuzamos egyenest lehet húzni.

Egy korábbi, a KöMaL honlapján is elérhető cikkben [1] összefoglaltam négyféle hiperbolikus modell, a Beltrami–Cayley–Klein-modell, a Poincaré-féle kör-, félsík- és félgömbmodellek alapvető definícióit és a modellek közötti megfeleltetéseket. A mostani játékunkhoz csak a körmodell néhány alapvető tulajdonságára lesz szükség.

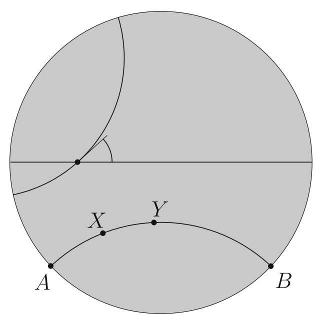
Vegyünk az euklideszi síkon egy körlapot, ez lesz az „alapkör". A kör belsejébe eső pontok a körmodell pontjai. A körmodell egyenesei az alapkört merőlegesen metsző köröknek az alapkör belsejébe eső ívei, beleértve az alapkör átmérőit is (*3. ábra*).

Két pont távolságát a következőképpen definiálhatjuk: ha X és Y két pont az alapkörre merőleges AB köríven, akkor az X és Y pontok távolsága

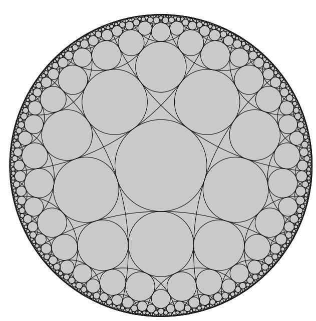
$$d(X,Y) = k \cdot \left|\ln(ABXY)\right| = k \cdot \left|\ln \frac{AX \cdot YB}{AY \cdot XB}\right|.$$

(A középső képletben négy, egy körön fekvő pont kettősviszonya szerepel, ami pontosan ugyanúgy fejezhető ki a húrok hosszával, mint amikor egy egyenesre esnek.)

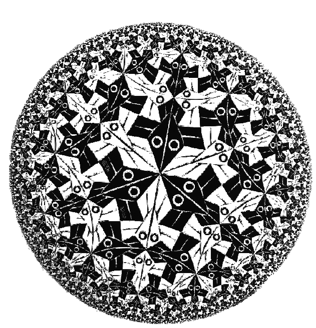
A távolságoknál sokkal szebb a szögek definíciója: két „egyenes" szöge éppen akkora, mint amekkorának a modellben látszik.



3. ábra



4. ábra



5. ábra

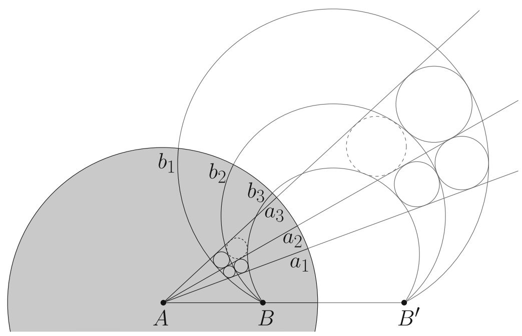
[2]Jules Henri Poincaré francia matematikus, 1854–1912

A modellben a tengelyes tükrözések az egyeneseknek megfelelő körívre való inverziók; ennek következménye, hogy *a hiperbolikus körvonalak a körmodellben is körvonalnak látszanak.* A modell határához közeledve az egyenlő nagyságú köröket a modellben egyre kisebb körökkel kell lerajzolnunk; a *4. ábrán* a körmodell egy kicsempézése látható olyan egybevágó szabályos ötszögekkel, amelyek szögei derékszögek, és az ötszögekbe írt köröket is megrajzoltam.

A körmodell csempézéseit rengeteg művészi alkotásban használták már fel; például az *5. ábrán* látható Escher[3] *Circle Limit I* című fametszete.

Olimpiai feladatjavaslat

Az *6. ábrán* az 1 ábra hiperbolikus változatát rajzoltam le: az A pont az alapkör középpontja, az ebből kiinduló a_1, a_2, a_3 félegyenesek az alapkör sugarai. A B pont egy másik pont a modellben, az ebből kiinduló félegyenesek képei az alapkörre merőleges körívek. Az ábrát invertálhatjuk az alapkör határára; a b_1, b_2, b_3 körívek meghosszabbításai az B pont inverzén mennek át, és a modellen kívül megkapjuk az ábra tükörképét is.

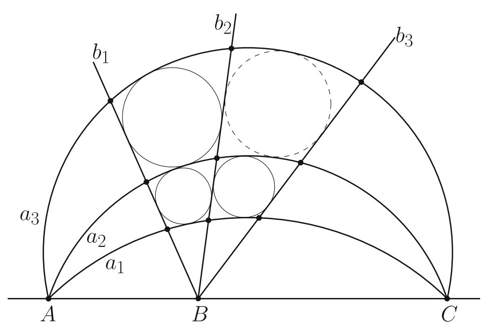


6. ábra

Az ábrával nem voltam elégedett. Túl nyilvánvaló volt, hogyan készült, a tükörkép ábra létrejötte sem tetszett, és a képen szereplő sugarakat és köríveket sem könnyű megrajzolni úgy, hogy metsszék egymást. Azt találtam ki, hogy megváltoztatom a pontok sorrendjét: az A pont nem a BB' szakasz meghosszabbításán, hanem a belsejében lesz, ettől kezdve az ábra többé már nem a körmodell része. Az alapkör lerajzolására sincs szükség. A pontok cseréje után ez lett az új feladat:

Feladat. *A sík A és C pontjait az a_1, a_2 és a_3 körívek úgy kötik össze, hogy az AC egyenesnek ugyanazon az oldalán vannak, és az a_2 körív az a_1 és az a_3 között helyezkedik el. Az AC szakasz egy B pontjából indulnak a b_1, b_2 és b_3 félegyenesek, ugyanabban a félsíkban, mint a körívek; a b_2 félegyenes b_1 és b_3 között helyezkedik el.*

Tekintsük a körívek és félegyenesek által határolt, négyoldalú $a_1b_1a_2b_2$, $a_1b_2a_2b_3$, $a_2b_1a_3b_2$, és $a_2b_2a_3b_3$ tartományokat. Bizonyítsuk be, hogy ha ezek közül valamelyik háromba kört lehet írni, akkor a negyedikbe is (7. ábra).



7. ábra

A feladatot (kicsit más betűzéssel) javasoltuk a 2010-es, Nemzetközi Matematikai Diákolimpiára, amelyet Kazahsztán új fővárosában, Asztanában rendeztek.

A pontok átrendezése miatt az eredeti, hiperbolikus geometriai megoldás már nem működik, de egy feladatjavaslathoz egyébként is illik elemi megoldásokat mellékelni. Két megoldást mutatok.

1. megoldás, kúpokkal

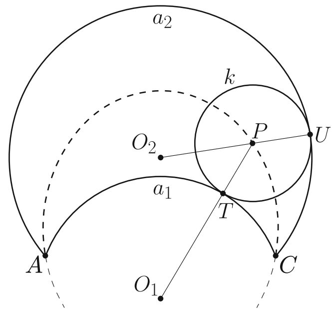
[3] Maurits Cornelis Escher holland grafikus, 1898–1972.

A kiinduló feladat mintájára, az ábrában szereplő körökre egymáshoz hasonló kúpokat fogunk illeszteni, majd megszerkesztjük a negyedik kúpot. A változás az, hogy most olyan körök is szerepelnek, amelyek két rögzített körív „közé” vannak írva. Megvizsgáljuk, hol lehetnek, milyen pályán mozoghatnak az ilyen körök középpontjai, és a körökre illesztett kúpok csúcsai.

1. lemma. *Azoknak a köröknek a középpontjai, amelyek kívülről érintik a_i-t és belülről érintik a_{i+1}-et, egy, A-t és C-t összekötő ellipszisíven vannak.* ($i = 1$ *vagy* $i = 2$.)

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy $i = 1$.

Legyen k olyan kör, amely kívülről érinti a_1-et és belülről érinti a_2-t, az érintési pontjai az a_1 íven T, az a_2 íven U, a középpontja P. Legyen az a_1 kör középpontja O_1, az a_2 középpontja O_2, a körök sugarai r, r_1, illetve r_2 (*8. ábra*).



8. ábra

Vegyük észre, hogy

$$O_1P + O_2P = (O_1T + TP) + (O_2U - PU) = (r_1 + r) + (r_2 - r) = r_1 + r_2,$$

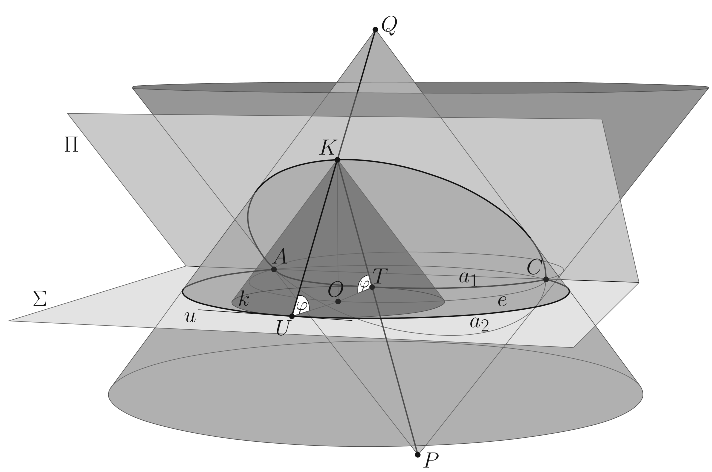
vagyis P rajta van az O_1, O_2 fókuszú, $r_1 + r_2$ nagytengelyű ellipszisen; ez az ellipszis átmegy az A és C pontokon, mert $O_1A + O_2A = O_1C + O_2C = r_1 + r_2$.

Megfordítva, ha P egy pont az ellipszisnek az a_1 és a_2 közötti ívén, akkor a P középpontú, $r = O_1P - r_1 = r_2 - O_2P$ sugarú kör kívülről érinti a_1-et és belülről érinti a_2-t.

2. lemma. *Legyen φ rögzített hegyesszög, és $i = 1$ vagy $i = 2$. Tekintsük azokat a köröket, amelyek kívülről érintik a_i-t és belülről érintik a_{i+1}-et, és emeljünk ezekre felfelé ezekre a körökre olyan kúpokat, amelyek alkotói φ szöget zárnak be a Σ síkkal. Az így kapható kúpok csúcsai egy, A-t és C-t összekötő ellipszisíven vannak.*

Bizonyítás. Ismét feltesszük, hogy $i = 1$. Illesszünk az a_1 körre lefelé, az a_2-re felfelé egy-egy kúppalástot, amelyek alkotói φ szöget zárnak be Σ-val; ezek csúcsa legyen P, illetve Q.

Legyen k egy tetszőleges kör, amely kívülről érinti a_1-et és belülről érinti a_2-t, a középpontja O, az érintési pontjai az a_1 íven T, az a_2 íven U. A k-ra felfelé illesztett kúp csúcsa legyen K. (*9. ábra*).



9. ábra

Legyen u a k és az a_2 ív U-ban húzott közös érintője. Az UK félegyenes a k-ra emelt kúp, az UQ félegyenes pedig az a_2-re emelt kúp alkotója. Mindkettő merőleges u-ra, φ szöget zár be Σ-val, és a körök belseje felé dől, ezért a két félegyenes ugyanaz. Tehát a K pont rajta van az UQ egyenesen, és ezáltal az a_2 ívre illesztett kúpon.

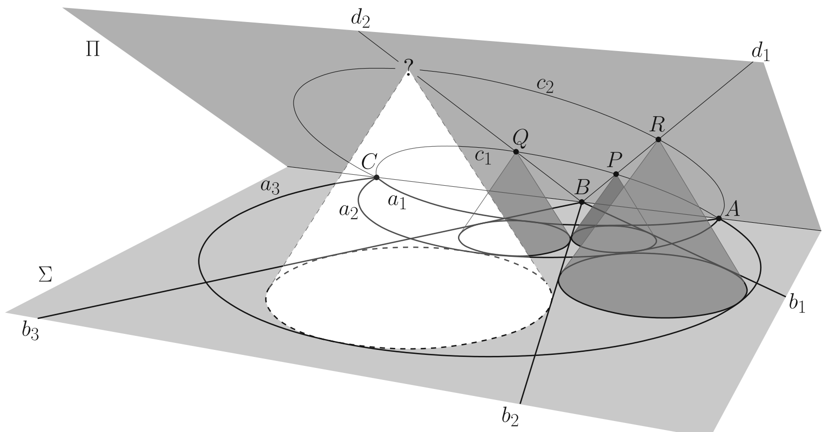
Ugyanígy láthatjuk, hogy a TK félegyenes a k-ra illesztett kúp, a TP félegyenes az a_1-re lefelé illesztett kúp alkotója, és ezek egymás meghosszabbításai, így a K pont az a_1-re illesztett kúppaláston is rajta van, tehát K közös pontja az a_1-re és az a_2-re illesztett kúppalástoknak.

A cikk 3. részében láttuk, hogy párhuzamos tengelyű, azonos meredekségű kúpok közös pontjai egy síkban vannak. Tehát a lehetséges K pontok egy rögzített Π síkban vannak. A két kúpnak A és C is közös pontja, tehát a Π sík illeszkedik az AC egyenesre.

Az 1. lemma szerint a lehetséges O pontok egy e ellipszisívet alkotnak, amely összeköti A-t és C-t. Ha ezt az ellipszist Σ-ra merőlegesen visszavetítjük Π-re, megkapjuk a lehetséges K pontokat tartalmazó ellipszisívet a Π síkban.

Most térjünk rá a feladat megoldására. A 2. lemma szerint az a_i és a_{i+1} ívek közé írt körökre emelt kúpok csúcsai egy A-t és C-t összekötő c_i ellipszisíven vannak ($i = 1, 2$). A b_j és b_{j+1} ívek közé írt körökhöz tartozó kúpok csúcsai pedig egy B-ből induló d_j egyenesen ($j = 1, 2$).

Legyen P, Q és R az $a_1b_1a_2b_2$, az $a_1b_2a_2b_3$, illetve az $a_2b_1a_3b_2$ tartományokba írt körre emelt kúp csúcsa; ekkor P a c_1 és d_1 metszéspontja, Q a c_1 és d_2 metszéspontja, és R a c_2 és d_1 metszéspontja. A feladat megoldásához elég azt igazolnunk, hogy c_2 és d_2 is elmetszi egymást (*10. ábra*).



10. ábra

Legyen Π az a félsík, aminek határa az AC egyenes, és illeszkedik a BPR félegyenesre. Ez a félsík tartalmazza a c_1 és c_2 ellipszisíveknek három-három pontját (A, C, P, illetve A, C, R), így mindkét ellipszisív része Π-nek. Mivel c_1 átmegy Q-n, a Q pont és a d_2 félegyenes is része Π-nek. A c_2 ellipszisnek B belső pontja, ezért a BQ félegyenes elmetszi c_2-t. Ezzel a feladatot megoldottuk.

2. megoldás, térbe kilépés nélkül

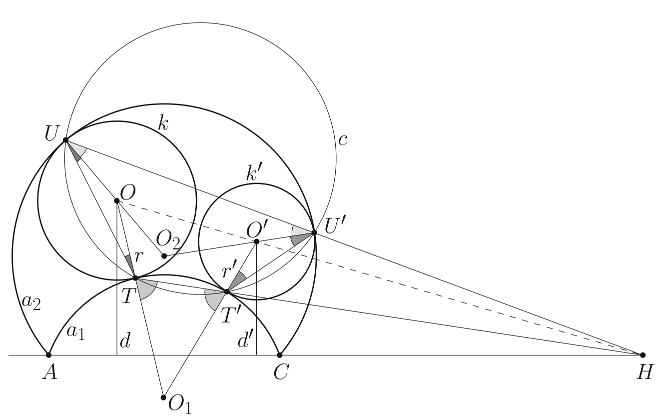
Az előbbi megoldást nem nehéz tisztán síkbeli bizonyítássá alakítani. Az 1. lemmára most is szükségünk lesz.

3. lemma. *Válasszunk egy tetszőleges k kört, amely kívülről érinti a_i-t és belülről érint a_{i+1}-et ($i = 1$ vagy $i = 2$), a középpontja O, sugara r, és legyen d az O pont és az AC egyenes távolsága. Az r/d arány nem függ a k megválasztásától.*

Nem nehéz észrevenni, hogy a 3. lemma a 2. lemma egyszerű átfogalmazása.

Bizonyítás. Az 1. lemmához hasonlóan legyen $i = 1$, az a_1 középpontja O_1, az a_2 középpontja O_2. Legyenek k és k' különböző körök, amik érintik a két ívet, sugaraik r, illetve r'; középpontjaik O, illetve O', távolságuk az AC egyenestől d, illetve d'. Azt akarjuk igazolni, hogy $\dfrac{r}{d} = \dfrac{r'}{d'}$.

Ha k és k' szimmetrikus az O_1O_2 egyenesre, akkor az állítás triviális; feltehetjük, hogy a két kör nem egymás tükörképe. A két kör érintési pontja a két köríven legyen T, T', U és U' a *11. ábra* szerint.



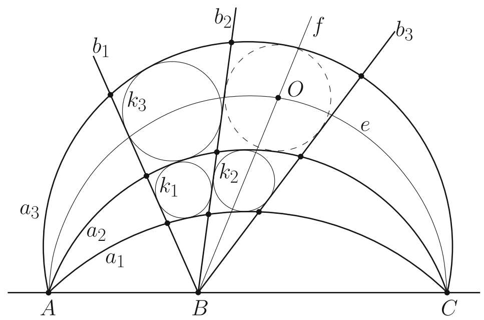
11. ábra

Legyen a k és k' körök külső hasonlósági pontja H. A k és az a_2 külső hasonlósági pontja U, a k' és az a_2 külső hasonlósági pontja U'; a Monge-tétel szerint a három hasonlósági pont, H, U és U' egy egyenesen van. Hasonlóan, a k és az a_1 belső hasonlósági pontja T, a k' és az a_1 belső hasonlósági pontja T'; a Monge-tétel szerint H, T és T' is egy egyenesen van. A H pont tehát a TT' és az UU' egyenes metszéspontja.

A $TT'U'U$ négyszög szemközti szögeinek összegét összeszámolhatjuk az OUT, O_1TT', $O'T'U'$ és $O_2U'U$ egyenlő szárú háromszögekből, és láthatjuk, hogy a szögek összege két szemközti csúcspárnál ugyanakkora; tehát a $TT'U'U$ négyszög húrnégyszög. (A háromszögek irányításától függően az ábra többféleképpen is kinézhet, ezért a teljes bizonyításhoz többféle esetet is meg kell vizsgálni.) Az a_1 és a $TT'UU'$ kör hatványvonala a TT' egyenes, az a_2 és a $TT'UU'$ kör hatványvonala pedig az UU' egyenes, tehát H a három kör hatványpontja, és ezen a harmadik hatványvonal, az AC egyenes is átmegy.

A k és k' köröket, sugaraikat és a d, d' távolságokat egymásba nagyíthatjuk a H pontból, ez bizonyítja, hogy $\dfrac{r}{d} = \dfrac{r'}{d'}$.

Az 1. és a 3. lemma együtt megoldja a feladatot. Tegyük fel, hogy az $a_1b_1a_2b_2$, $a_1b_2a_2b_3$ és $a_2b_1a_3b_2$ tartományokba kört lehet írni; ezt a három kört jelölje rendre k_1, k_2, illetve k_3. Sugaraik legyenek r_1, r_2, illetve r_3; középpontjaik távolsága az AC egyenestől d_1, d_2, illetve d_3.



12. ábra

Legyen e az az 1. lemma szerinti ellipszisív, amely az a_2 és a_3 köríveket érintő körök középpontjaiból áll, és legyen f a b_2, b_3 félegyenesek szögfelezője; az e és az f metszéspontja legyen O, az O távolsága az AC egyenestől d (*12. ábra*).

A 3. lemma szerint $\dfrac{r_1}{d_1} = \dfrac{r_2}{d_2}$, továbbá a k_1 és k_3 köröket a B pontból egymásba lehet nagyítani, ezért $\dfrac{r_1}{d_1} = \dfrac{r_3}{d_3}$. Legyen $r = \dfrac{r_2}{d_2} \cdot d = \dfrac{r_3}{d_3} \cdot d$. A 3. lemma szerint az O középpontú, r sugarú kör érinti az a_2 és az a_3 ívet is. Továbbá, a k_2 kört a B pontból ugyanebbe a körbe nagyíthatjuk. Ezzel megszerkesztettük az $a_2b_2a_3b_3$ tartomány beírt körét.

Asztanai közjáték

Asztanába megérkezve az a meglepetés ért, hogy az olimpia helyszínén létezik egy épület (a neve Shabyt), ami két párhuzamos tengelyű kúp metszete. A feladatkiválasztó bizottság tagjaival készítettünk is néhány fényképet rólam és a feladatomról.

A „Shabyt” („Шабыт”, *jelentése: inspiráció*) *művészeti egyetem Asztanában, Kazahsztán fővárosában*

A zsűriben a feladat nem volt annyira népszerű. Többeknek tetszett, de a térgeometriától ódzkodó csendes többség gyorsan kiszavazta a lehetséges nehéz jelöltek közül. (De azért nem ez volt a legnépszerűtlenebb feladat: a C6-os feladatot még ennél is jobban utálták.)

Az olimpia megnyitó ünnepsége a Függetlenségi Palotában volt, közvetlenül a Shabyt melletti épületben. A zsűri nagy része a megnyitóra utazás közben, a buszról látta először az épületet, amikor már rég kiválasztották a hat feladatot a versenyre.

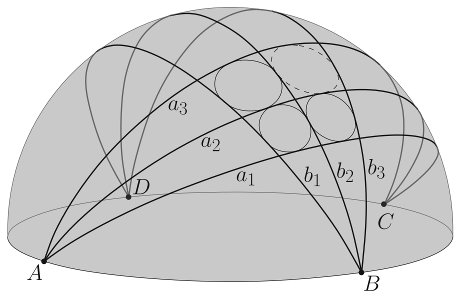
Feladatok

1. Oldjuk meg a Kiinduló feladatot a körökhöz húzott érintő szakaszok összehasonlításával.

2. Bizonyítsuk be a 2. lemmát úgy, hogy az a_1 és a_2 körívekre nem kúpokat, hanem olyan gömböket illesztünk, amelyek φ szögben metszik a Σ síkot.

3. Bizonyítsuk be a 3. lemmát koordinátákkal.

4. Mutassuk meg, hogy a 7. ábrát inverzióval egy félgömbfelületre képezhetjük úgy, hogy az a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 görbék képei a gömbön fél főkörök legyenek (*13. ábra*). Az így kapott gömbi állítást bizonyítsuk be a békaszem-módszerrel.



13. ábra

Irodalom

[1] Kós Géza: Hiperbolikus Escher-grafikák. KöMaL 55/1 (2005. január), 2–10.
https://www.komal.hu/cikkek/2005-01/escher.h.shtml

[2] G7 feladat. IMO Shortlist 2010, 60–63.
https://www.imo-official.org/problems/IMO2010SL.pdf