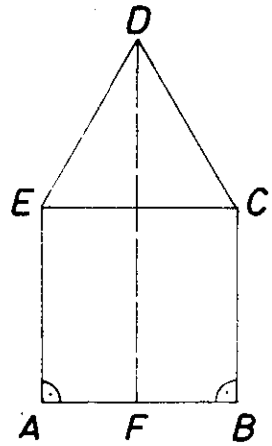
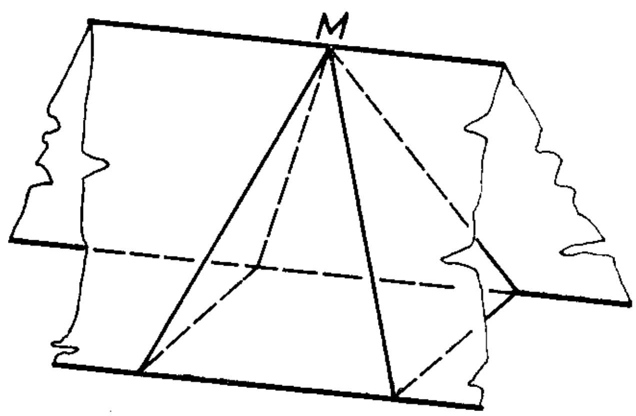
Megoldás. Gúlánknak 5 lapja van, tehát az S metsző sík mindegyik lapját metszi. A test konvex, ezért az $ABCDE$ metszet is konvex. Legyenek a metszet derékszögű csúcsai A és B, így AE oldala párhuzamos és egyenlő BC-vel, az ötszögről levágható az $ABCE$ négyzet és marad a CED egyenlő oldalú háromszög. Eszerint az AB oldal F felezőpontját D-vel összekötő egyenes szimmetriatengelye a metszetnek (1. ábra).



1. ábra

BC és EA párhuzamossága alapján S párhuzamos azzal az e egyenessel, amelyben a BC-t és EA-t tartalmazó lapok síkjai egymást metszik. Tisztázzuk e-nek a gúlával való kapcsolatát! A gúla 5 lapsíkja közül 10-féleképpen választható ki 2, a 10 metszésvonal közül 4 alapél, 4 oldalél, végül a $2-2$ nem szomszédos oldallapsík közös egyenesei a gúla négyélű M csúcsán átmenő, az alapsíkkal párhuzamos egyenesek (mert az oldallapsíkok egyenlő szöggel hajlanak az alapsíkhoz). A 10 metszésvonal e három csoportjában az egyenesek ekvivalensek egymással a gúla szimmetriái alapján (2. ábra).

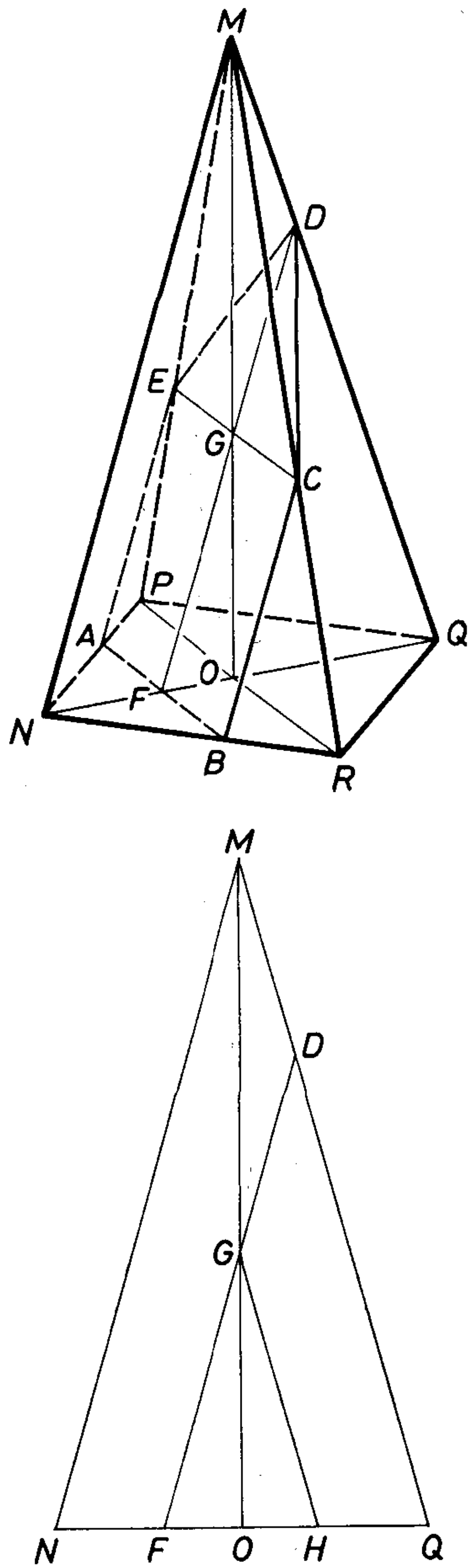


2. ábra

Ellentmondásra vezet annak föltevése, hogy S az utóbbi 2 egyenes valamelyikével volna párhuzamos. Ugyanis ekkor BC és EA párhuzamosak volnának egy alapéllel; másrészt egyenlő hosszúak is, emiatt az egyenlő szárú háromszög alakú, egybevágó oldallapokban egyenlő távolságra volnának M-től, tehát S párhuzamos volna az alapsíkkal, holott – mint láttuk – azt is metszenie kell.

Az is lehetetlen, hogy alapél legyen e, mert akkor BC és EA közül az alaplapban fekvő egyenlő volna az alapéllel, az oldallapban fekvő pedig rövidebb volna annál.

Ezek szerint az e egyenes valamelyik oldalél, mondjuk MN (az alapnégyzet csúcsait N, P, Q, R-rel jelölve; és BC, AE mindegyike háromszög alakú lapban van, amelyek egybevágók. Az előbbiekhez hasonló meggondolással BC és AE az NM éltől is egyenlő távolságra vannak, ezért $NA = NB$, illetve $ME = MC$. Ugyanis A és B csak az alapon lehetnek, hiszen az NMP és NMR oldallapok között az N csúcsnál csak 1 lap van, ahogy az A és B csúcsok közt a metszeten 1 oldal, viszont M-nél 2 lap, ahogy C és E közt 2 oldal. Ezek szerint AB merőleges az alapnégyzet NQ átlójára és S merőleges az NMQ átlós síkmetszetre, amely egyben szimmetriasíkja is a testnek. Továbbá C, D, E rendre az MR, MQ, MP oldaléllel való metszéspontja S-nek (3. ábra).



3. ábra

Mivel S merőleges MNQ-ra, azért párhuzamos PR-rel, és az AB, EC egyenesek is párhuzamosak PR-rel. Az EC szakasz benne van az MPR átlós síkban, és G felezőpontja rajta van a gúla MO magasságán, ahol O az alaplap centruma. Az $MNPR$ tetraédernek az MN és PR éleivel is párhuzamos S, és S alkalmas megválasztásával annyi tetszőleges gúlában elérhető, hogy $ABCD$ négyzet legyen. Ha ugyanis MN és PR merőlegesek, és S párhuzamos velük, akkor $ABCD$ mindig téglalap, és ez akkor lesz négyzet, ha $NA : AP = MN : PR$. Valóban, az MNP lapon $AE : MN = AP : PN$, a PRN lapon $AB : PR = AN : PN$, tehát

$$\frac{AE}{AB} = \frac{MN}{PR} : \frac{NA}{AP}.$$

Most már csak azt kell biztosítanunk, hogy a CDE háromszög szabályos legyen. Mivel DF ennek is szimmetriatengelye, ehhez elég annyi, hogy $GD : GF = \sqrt{3} : 2$ legyen. Az FDQ. háromszögben messe a G-n át DQ-val párhuzamosan húzott egyenes FQ-t H-ban, akkor $GD : GF = HQ : HF$. Tehát $GD : GF$ akkor egyenlő $(\sqrt{3} : 2)$-vel, ha $HQ : HO = \sqrt{3} : 1$, hiszen $HF = 2HO$. Mivel pedig $HQ : HO = FN : FO = NA : AP = MN : PR$, ez akkor teljesül; ha $MN = \sqrt{3}$ $PR = \sqrt{6}$, vagyis $MO = \sqrt{MN^2 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{11}{2}} = 2,345$.