I. rész

1. *a) Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek összege legfeljebb* 4? (*7 pont*)
b) Hány olyan lesz ezek között a számok között, amely osztható 60*-nal?* (*5 pont*)

Megoldás. *a)* A sorrendre való tekintet nélkül 11-féleképpen tudjuk előállítani a 4-et, a 3-at, a 2-t vagy az 1-et négy nemnegatív egész szám összegeként:
$4 = 4 + 0 + 0 + 0 = 3 + 1 + 0 + 0 = 2 + 2 + 0 + 0 = 2 + 1 + 1 + 0 = 1 + 1 + 1 + 1$ (5 lehetőség);
$3 = 3 + 0 + 0 + 0 = 2 + 1 + 0 + 0 = 1 + 1 + 1 + 0$ (3 lehetőség);
$2 = 2 + 0 + 0 + 0 = 1 + 1 + 0 + 0$ (2 lehetőség);
$1 = 1 + 0 + 0 + 0$ (1 lehetőség).

Az $X000$ típusból csak egyféleképpen alkothatunk négyjegyű számot, mert a 0 nem állhat a legnagyobb helyiértéken.

Az $XY00$ típusban 3-féleképpen választhatjuk ki a két nulla helyét, a maradék két helyre 2-féleképpen variálhatjuk a másik két számjegyet, tehát ezekből egyaránt $(3 \cdot 2 =)$ 6 négyjegyű számot képezhetünk.

Az $XX00$ típusban 3-féleképpen választhatjuk ki a két nulla helyét, így ezekből 3 különböző négyjegyű szám adódik.

Az $XYY0$ típusban 3-féleképpen választhatjuk ki a nulla helyét, ezután 3-féleképpen választhatjuk ki az X helyét, így ebből $(3 \cdot 3 =)$ 9-féle négyjegyű szám képezhető.

Az $XXX0$ típusban 3-féleképpen választhatjuk ki a nulla helyét, így ebből 3 különböző négyjegyű szám adódik.

Végül az $XXXX$ típusból csak egyféleképpen alkothatunk négyjegyű számot.

Összesen tehát $(1 + 6 + 3 + 9 + 1 + 1 + 6 + 3 + 1 + 3 + 1 =)$ 35, a feltételeknek megfelelő négyjegyű szám van.

b) 60-nal pontosan akkor osztható egy szám, ha 3-mal, 4-gyel, és 5-tel is osztható. 3-mal csak akkor osztható a szám, ha számjegyeinek összege 3-mal osztható, tehát esetünkben a számjegyek összege 3. 5-tel akkor osztható, ha 0-ra vagy 5-re végződik, de 5-re végződő szám nincs a szóba jövő számok között, a számnak tehát 0-ra kell végződnie. 4-gyel akkor osztható, ha az utolsó két számjegyéből képzett szám osztható 4-gyel, tehát a szóba jöhető lehetőségek közül az utolsó két számjegy 00 vagy 20 lehet (12 nem lehet, mert az 5-tel oszthatóság miatt 0-ra kell végződnie).

Azok a négyjegyű számok, melyek 00-ra vagy 20-ra végződnek, és számjegyeik összege 3, a következők: 3000, 2100, 1200, 1020.

Tehát 4, a feltételeknek megfelelő szám van.

2. *a) Egy osztályban egy matematika dolgozatnál a* 6 *kékszemű tanuló átlaga pontosan* 3*, a többi, nem kékszemű tanuló átlaga pontosan* 4 *lett. A* 21 *fiú átlaga pontosan* 3,5*, a lányok átlaga pontosan* 4,5 *lett. Határozzuk meg a dolgozat átlagát a teljes osztályban.* (*5 pont*)

b) Az iskolai túraszakosztály a hétvégi kirándulásra különbuszt rendelt. A buszköltséget a résztvevők között egyenlő arányban osztják szét. A kitűzött jelentkezési határidő egy hétfői napon járt le. Mivel maradt még szabad hely a buszban, ezért kedden még két jelentkezést elfogadtak, így az egy résztvevőre jutó buszköltség 175 Ft*-tal csökkent. Szerdán aztán még három jelentkezést elfogadtak, így az egy résztvevőre jutó buszköltség további* 225 Ft*-tal csökkent. Így már megtelt a megrendelt autóbusz.*

Hány jelentkezést fogadtak el összesen a kirándulásra, és mennyibe került a megrendelt különbusz? (*8 pont*)

Megoldás. *a)* Jelölje az osztály létszámát x. Az osztályzatok összegét kétféleképpen felírva:

$$6 \cdot 3 + (x - 6) \cdot 4 = 21 \cdot 3{,}5 + (x - 21) \cdot 4{,}5,$$
$$4x - 6 = 4{,}5x - 21,$$
$$x = 30.$$

Az osztály létszáma 30 volt.

A dolgozat átlaga a teljes osztályban $\dfrac{6 \cdot 3 + 24 \cdot 4}{30} = 3{,}8$ volt.

Ellenőrzés: $\dfrac{21 \cdot 3{,}5 + 9 \cdot 4{,}5}{30} = 3{,}8$, ami megegyezik az előzőleg kiszámított átlaggal.

b) I. megoldás. Jelölje x a szerdáig elfogadott jelentkezések számát. Ekkor hétfőig $x - 5$, keddig $x - 3$ jelentkezést fogadtak el. Jelölje y a teljes buszköltséget.

Ekkor megoldandó az alábbi egyenletrendszer:

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{x-5} - 400,$$
$$\frac{y}{x} = \frac{y}{x-3} - 225.$$

Beszorozva a nevezőkkel:

$$y(x - 5) = yx - 400x(x - 5),$$
$$y(x - 3) = yx - 225x(x - 3).$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket és rendezve:

$$5y = 400x(x-5),$$
$$3y = 225x(x-3).$$

Az első egyenletből $y = 80x(x-5)$, ezt a másodikba beírva:

$$240x(x-5) = 225x(x-3).$$

Mivel $x \neq 0$, oszthatunk vele, és rendezés után kapjuk, hogy $x = 35$. Visszahelyettesítve $y = 84\,000$ adódik. Tehát 35 jelentkezést fogadtak el szerdáig, a teljes buszköltség pedig 84 ezer Ft volt.

Ellenőrzés: hétfőig 30 ember jelentkezett, nekik $\left(\frac{84\,000}{30} = \right)$ 2800 Ft-ot kellett volna fizetni.

Keddig 32 ember jelentkezett, így egy embernek $\left(\frac{84\,000}{32} = \right)$ 2625 Ft-ot kellett volna fizetni. $2625 = 2800 - 175$ valóban.

Szerdáig 35 ember jelentkezett, így egy embernek $\left(\frac{84\,000}{35} = \right)$ 2400 Ft-ot kellett fizetni. $2400 = 2625 - 225$ valóban.

II. megoldás. Jelölje n a hétfőig elfogadott jelentkezések számát, és b (Ft) az egy főre eső buszköltséget n jelentkező esetén. Ekkor keddig $n+2$ fő jelentkezett, akiknek $b-175$ Ft-ot kellett volna fizetni, szerdáig pedig végül $n+5$ fő jelentkezett, akiknek $b-400$ Ft-ot kellett fizetni. Ekkor megoldandó az alábbi egyenletrendszer:

$$nb = (n+2)(b-175),$$
$$nb = (n+5)(b-400).$$

Mindkét egyenletben elvégezve a kijelölt műveleteket, és nb-t kivonva az egyenletek mindkét oldalából:

$$0 = 2b - 175n - 350,$$
$$0 = 5b - 400n - 2000.$$

A második egyenletből $b = 80n + 400$, ezt az elsőbe beírva:

$$0 = 2(80n + 400) - 175n - 350,$$

ahonnan rendezés után kapjuk, hogy $n = 30$. Visszahelyettesítve $b = 2800$ adódik.

Tehát $(30 + 5 =)$ 35 jelentkezést fogadtak el szerdáig, a teljes buszköltség pedig $(30 \cdot 2800 =)$ 84 000 Ft volt.

Ellenőrzés mint az I. megoldásban.

3.

a) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$4^x + 2 < 9 \cdot 2^{x-1}. \qquad \text{(6 pont)}$$

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left|\frac{3}{2} - \sin x - 2\cos^2 x\right| = \frac{1}{2}. \qquad \text{(7 pont)}$$

Megoldás.

a) Legyen $2^x = a$. Ekkor $4^x = a^2$ és $2^{x-1} = \frac{a}{2}$. Így az egyenlőtlenség a következőképpen írható fel: $a^2 + 2 < \frac{9a}{2}$. Kettővel beszorozva és nullára rendezve:

$$2a^2 - 9a + 4 < 0.$$

A $2a^2 - 9a + 4 = 0$ egyenlet gyökei 4 és 0,5. Mivel a főegyüttható pozitív, az egyenlőtlenség $0{,}5 < a = 2^x < 4$ esetén teljesül.

Mivel a 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan monoton nő, $2^{-1} < 2^x < 2^2$ pontosan akkor teljesül, ha $-1 < x < 2$.

b)
$$\frac{3}{2} - \sin x - 2\cos^2 x = \frac{3}{2} - \sin x - 2(1 - \sin^2 x) = 2\sin^2 x - \sin x - \frac{1}{2}.$$

Az abszolútértéket figyelembe véve két eset lehetséges:

$$2\sin^2 x - \sin x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \text{vagy} \quad 2\sin^2 x - \sin x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Nullára rendezve az egyenleteket kapjuk, hogy

$$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \quad \text{vagy} \quad 2\sin^2 x - \sin x = 0.$$

A $\sin x$-ben másodfokú egyenleteket megoldva adódik, hogy $\sin x$ értéke négyféle lehet: 1, $-\frac{1}{2}$, 0 vagy $\frac{1}{2}$. Ezekből kapjuk az egyenlet megoldásait: $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $\pm\frac{\pi}{6} + k\pi$ és $k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Ekvivalens átalakításokat végeztünk.

4. *a) Az*

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b$$

és a

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = (x - c)^2 + d$$

függvények grafikonjai az $M_1(-1; 10)$ és az $M_2(4; -5)$ pontokban metszik egymást. Határozzuk meg az a, b, c és d értékét. *(7 pont)*

b) Határozzuk meg az

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x + 7$$

és a

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = (x + 3)^2 - 6$$

függvények által közrezárt síkidom területét. *(6 pont)*

Megoldás. *a)* M_1 és M_2 illeszkednek f grafikonjára, ezért $10 = -a + b$ és $-5 = 4a + b$. Az első egyenletből kivonva a másodikat $15 = -5a$ adódik, innen pedig $a = -3$. Visszahelyettesítéssel kapjuk, hogy $b = 7$.

M_1 és M_2 illeszkednek g grafikonjára is, ezért $10 = (-1 - c)^2 + d$ és $-5 = (4 - c)^2 + d$. Az első egyenletből kivonva a másodikat a $15 = (-1 - c)^2 - (4 - c)^2$ egyenlet adódik. A négyzetre emeléseket elvégezve a másodfokú tag kiesik, és kapjuk, hogy $15 = 10c - 15$, innen pedig $c = 3$. Ezt visszahelyettesítve például az első egyenletbe $10 = (-1 - 3)^2 + d$, ahonnan $d = -6$.

Összefoglalva tehát $a = -3$, $b = 7$, $c = 3$ és $d = -6$, így $f(x) = -3x + 7$ és $g(x) = (x - 3)^2 - 6$.

b) Meghatározzuk a két függvény metszéspontjait.

$$3x + 7 = (x + 3)^2 - 6$$

A négyzetre emelést elvégezve és nullára rendezve: $0 = x^2 + 3x - 4$. Ennek az egyenletnek a gyökei $x_1 = 1$ és $x_2 = -4$.

Mivel a két függvény grafikonja közül az f grafikonja helyezkedik el a g grafikonja fölött, ezért a keresett területet a $\int\limits_{-4}^{1} \big(f(x) - g(x)\big)\,\mathrm{d}x$ integrál adja meg:

$$f(x) - g(x) = (3x + 7) - \left[(x + 3)^2 - 6\right] = 3x + 7 - (x^2 + 6x + 3) = -x^2 - 3x + 4,$$

$$\int_{-4}^{1} (-x^2 - 3x + 4)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_{-4}^{1} =$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right) - \left(\frac{64}{3} - 24 - 16\right) = \frac{13}{6} - \left(-\frac{56}{3}\right) = \frac{125}{6}.$$

A síkidom területe tehát $\frac{125}{6}$ területegység.

II. rész

5. *Egy felmérésben azt vizsgálták, az autósok hogyan viszonyulnak a téli gumiabroncsok használatához. A felmérésben* 1800 *autóst kérdeztek meg. Azok, akik használnak téli gumiabroncsokat,* 1320*-szal többen voltak, mint akik nem. Azok között, akik nem használnak téli gumiabroncsot,* 40%*-kal kevesebben voltak azok, akik ezt nem is tartják fontosnak, mint azok, akik ugyan fontosnak tartják, de anyagi okokból lemondanak róla.*

a) Ábrázoljuk a felmérés eredményét kördiagramon. *(6 pont)*

Egyes személyautókban az autó által megtett távolságot az autó műszerei úgy számítják ki, hogy a gumiabroncs ismert kerületét és a kerék által megtett fordulatok számát összeszorozzák.

Vera észrevette, hogy néhány év használat után az autó műszerei már pontatlanul mutatták a megtett távolságot: amíg az út melletti kilométerkövek tanúsága szerint pontosan 100 km*-t tett meg, addig a műszerfal* 101,2 km *megtett* *utat jelzett. Ennek az volt az oka, hogy az autó gumiabroncsai a néhány év használat alatt kicsit elkoptak, így a kerületük csökkent. A katalógusok szerint a Vera autóján használt gumiabroncsok gyártáskori átmérője* 632 mm *volt. A műszerek – a kopást figyelmen kívül hagyva – mindvégig ebből az adatból határozták meg az autó által megtett távolságot.*

b) Hány millimétert kopott eddig Vera autója gumiabroncsának felülete? (*5 pont*)

A rendőrség közúti ellenőrzés-sorozaton vizsgálja az autók gumiabroncsát. Egy nyári gumiabroncs úgynevezett profilmélysége gyártáskor kb. 8 mm. *Az érvényes jogszabályok szerint nem lehet közlekedni olyan gumiabronccsal, melynek a kopása olyan mértékű, hogy profilmélysége* 1,6 mm *alá csökken. Felmérések alapján feltételezhető, hogy minden tizenötödik autón a gumiabroncsok kopása ezt az értéket meghaladja. (Ezt úgy tekinthetjük, hogy minden egyes autó esetén* 1/15 *annak a valószínűsége, hogy a kopás* 1,6 mm *alá csökkent.)*

c) Egy járőrpáros egy napi szolgálat alatt 80 *autó gumiabroncsainak kopását ellenőrzi. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy legalább* 5 *olyan autót találnak az ellenőrzés során, melynél a gumiabroncsok kopása meghaladja a jogszabályban előírt határértéket.* (*5 pont*)

Megoldás. *a)* $\dfrac{1800-1320}{2}=240$ autós nem használ téli gumiabroncsot, $1800-240=1560$ autós igen. Legyen n 240 téli gumiabroncsot nem használó autós közül azoknak a száma, akik anyagi okból mondanak le a használatáról, ekkor azok száma, akik nem is tartják fontosnak a használatát, $0{,}6n$. $0{,}6n=240-n$, ahonnan $n=150$.

Tehát 150-en anyagi okokból mondanak le a téli gumiabroncs használatáról, 90-en pedig nem tartják fontosnak a használatát. A kördiagramon 1° $\dfrac{1800}{360}=5$ autósnak felel meg.

A téli gumiabroncsot használókhoz tartozó középponti szög tehát $\dfrac{1560}{5}=312$ fokos, a használatról anyagi okokból lemondókhoz tartozó középponti szög $\dfrac{150}{5}=30$ fokos, a használatot fontosnak nem tartókhoz tartozó középponti szög pedig $\dfrac{90}{5}=18$ fokos.

b) I. megoldás. A gumiabroncs gyártáskori kerülete $K=d\pi\approx 1985{,}5$ mm. Ekkor 100 km megtétele alatt a kerék $\dfrac{100\,000\,000}{1985{,}5}\approx 50\,365$-öt fordul.

A kopott gumiabronccsal futó autó műszerei 101,2 km út megtételét

$$\frac{101\,200\,000}{1985{,}5}\approx 50\,970$$

fordulat érzékelése után jelzik. Ekkor azonban az autó ténylegesen még csak 100 km-t tett meg, tehát az abroncs kerülete $\dfrac{100\,000\,000}{50\,970}\approx 1961{,}9$ mm, sugara $\dfrac{1961{,}9}{2\pi}\approx 312{,}2$ mm.

Mivel az abroncs gyártáskori sugara 316 mm volt, ezért a felületi kopás kb. 3,8 mm volt.

II. megoldás. A műszerek a ténylegesen megtett út 1,012-szeresét érzékelték, tehát a kerék 1,012-szer annyi fordulatot tett meg, mint amennyit újkori állapotában 100 km-en fordult volna. Azaz kerülete 1,012-ed részére csökkent. Mivel a kerület és a sugár egyenesen arányos, ezért a kerék sugara is 1,012-ed részére csökkent, tehát a gumi kopott állapotában $316:1{,}012\approx 312{,}3$ mm-es. A felületi kopás így kb. 3,7 mm (az I. megoldásban a kerekítések miatt jött ki 3,8 mm).

c)

$$\begin{aligned}P(\text{legalább } 5)&=1-P(\text{legfeljebb } 4)=\\&=1-\big[P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)\big].\end{aligned}$$

Az $n=80$ és $p=\dfrac{1}{15}$ paraméterű binomiális eloszlás segítségével:

$$P(0)=\left(\frac{14}{15}\right)^{80}\approx 0{,}0040,$$
$$P(1)=\binom{80}{1}\left(\frac{14}{15}\right)^{79}\cdot\frac{1}{15}\approx 0{,}0229,$$
$$P(2)=\binom{80}{2}\left(\frac{14}{15}\right)^{78}\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^{2}\approx 0{,}0646,$$
$$P(3)=\binom{80}{3}\left(\frac{14}{15}\right)^{77}\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^{3}\approx 0{,}1200,$$
$$P(4)=\binom{80}{4}\left(\frac{14}{15}\right)^{76}\cdot\left(\frac{1}{15}\right)^{4}\approx 0{,}1650.$$

Így $P(\text{legalább }5)=1-\big[P(0)+P(1)+P(2)+P(3)+P(4)\big]\approx 1-0{,}3765=0{,}6235.$

6. *A valós számokon értelmezett $f(x)=2x^3+3x^2+bx+c$ függvénynek lokális maximuma van $x=-2$-nél.*
a) Igazoljuk, hogy ekkor $b=-12$. *(5 pont)*
b) Határozzuk meg c lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy az f-nek három különböző zérushelye van. *(7 pont)*
c) Határozzuk meg az f zérushelyeit abban az esetben, ha $c=0$. *(4 pont)*

Megoldás. *a)* A függvénynek ott lehet lokális maximuma, ahol az első deriváltja nulla. $f'(x)=6x^2+6x+b$, $f'(-2)=12+b=0$, azaz valóban csak $b=-12$ lehetséges.

Ellenőrizni kell még, hogy valóban lokális maximumhely-e ekkor a -2. $f''(x)=12x+6$, $f''(-2)=-18$, mivel a második derivált itt negatív, ezért a -2 valóban lokális maximumhely.

b) A harmadfokú függvény alakját figyelembe véve akkor lesz az f-nek három különböző zérushelye, ha a lokális maximuma pozitív, lokális minimuma negatív értéket vesz fel.

$$f'(x)=6x^2+6x-12.$$

A deriváltfüggvény zérushelyei a -2 és az 1, melyek közül a -2 lokális maximumhely, az 1 pedig lokális minimumhely.

$$f(-2)=2\cdot(-2)^3+3\cdot(-2)^2-12\cdot(-2)+c=20+c>0,\qquad \text{ahonnan}\quad c>-20,$$
$$f(1)=2\cdot 1^3+3\cdot 1^2-12\cdot 1+c=-7+c<0,\qquad \text{ahonnan}\quad c<7.$$

Összevetve: $-20<c<7$ esetén lesz f-nek három különböző zérushelye.

c) $c=0$ esetén: $f(x)=2x^3+3x^2-12x=x(2x^2+3x-12)$. Ennek a függvénynek egyik zérushelye $x_1=0$, másik két zérushelyét a $2x^2+3x-12=0$ egyenlet megoldásai adják. Ezek (a másodfokú egyenlet megoldóképletéből) $x_{2,3}=\dfrac{-3\pm\sqrt{105}}{4}$ (azaz három tizedesjegy pontossággal $-3{,}312$ és $1{,}812$).

7. *A kanaszta nevű kártyajátékot két csomag francia kártyával játsszák. Egy csomag francia kártyában 55 lap található: négy szín (pikk, káró, kőr, treff) mindegyikében 13-13 lap (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Bubi, Dáma, Király, Ász) van. Ezeken a lapokon kívül mindegyik csomagban van három Joker is. A pikk és treff színű lapok feketék, a káró és kőr színű lapok pirosak.*

A játék elején az egyik játékos kettéválasztja a jól megkevert kártyacsomagot, és a csomag egyik felében az alsó három lapot megnézheti: ez az úgynevezett emelés. Ha a három lap között van „szerencsés” lap, akkor ezeket a szerencsés lapokat a játékos megkapja. Szerencsés lapnak számít a hat darab Joker, a nyolc darab 2-es (amit a kanasztában szintén Jokernek használnak) és a négy darab piros 3-as.

a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az emelést végző játékos nulla, egy, kettő, illetve három szerencsés lapot kap. *(5 pont)*
b) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kezdő játékosnak kiosztott első négy lap között mind a négy szín előfordul. *(4 pont)*
Egy szerencsejátékban 4 Király és 4 Ász közül visszatevés nélkül húz lapokat a játékos, egészen addig, amíg az első Ászt kihúzza. Ha az első Ász kihúzása előtt k darab Királyt húzott ki, akkor a játékos nyereménye $100k^2$ forint.
c) Határozzuk meg ebben a játékban a nyeremény várható értékét. *(7 pont)*

Megoldás. *a)* A kérdezett valószínűségeket hipergeometrikus eloszlás segítségével határozhatjuk meg. Összesen van a két csomagban 110 lap, ezek között 18 szerencsés, és 3 lapot húzunk ki visszatevés nélkül.

$$P(0)=\frac{\binom{92}{3}}{\binom{110}{3}}=\frac{125\,580}{215\,820}=\frac{2093}{3597}\approx 0{,}582,$$
$$P(1)=\frac{\binom{18}{1}\binom{92}{2}}{\binom{110}{3}}=\frac{75\,348}{215\,820}=\frac{2093}{5995}\approx 0{,}349,$$
$$P(2)=\frac{\binom{18}{2}\binom{92}{1}}{\binom{110}{3}}=\frac{14\,076}{215\,820}=\frac{391}{5995}\approx 0{,}065,$$
$$P(3)=\frac{\binom{18}{3}}{\binom{110}{3}}=\frac{816}{215\,820}=\frac{68}{17\,985}\approx 0{,}0038.$$

b) Annak a valószínűsége, hogy például az első négy lap sorban pikk, káró, kőr és treff:

$$\frac{26}{110}\cdot\frac{26}{109}\cdot\frac{26}{108}\cdot\frac{26}{107}\approx 0{,}0033.$$

A négy különböző szín azonban $4!=24$-féle sorrendben kerülhet elő, ez 24 különböző (diszjunkt) lehetőség, tehát a kérdezett valószínűség az előző érték 24-szerese, azaz 0,079.

c) Annak a valószínűsége, hogy 0, 1, 2, 3, illetve 4 Királyt húz a játékos az első Ász előtt:

$$P(0)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2},$$
$$P(1)=\frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}=\frac{2}{7},$$
$$P(2)=\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{7},$$
$$P(3)=\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{5}=\frac{2}{35},$$
$$P(4)=\frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{70}.$$

A kérdezett várható érték így

$$\sum_{i=0}^{4}P(i)\cdot 100i^2=\left(\frac{1}{2}\cdot 0+\right)\frac{2}{7}\cdot 100+\frac{1}{7}\cdot 400+\frac{2}{35}\cdot 900+\frac{1}{70}\cdot 1600=160\text{ Ft}.$$

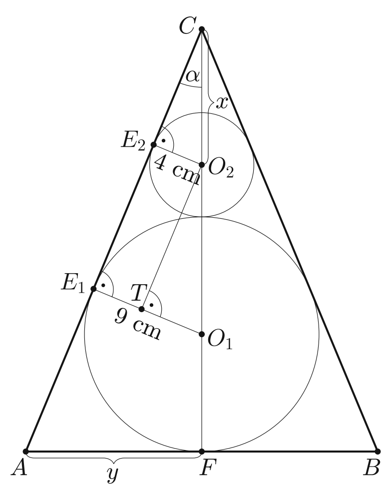
8. *Az ABC egyenlőszárú háromszög alapja AB, beírt körének középpontja O_1, a beírt kör sugara* 9 cm. *A háromszögben olyan kört írunk, mely érinti a beírt kört és a háromszög két szárát. Ennek a körnek a középpontja O_2, sugara pedig* 4 cm.

a) *Határozzuk meg az egyik száron keletkező, a két kör érintési pontjai által meghatározott szakasz hosszát.* (*5 pont*)

b) *Igazoljuk, hogy $O_2C=10{,}4$ cm.* (*4 pont*)

c) *Határozzuk meg a háromszög területét.* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Jelölje az AC száron a beírt kör érintési pontját E_1, a második kör érintési pontját pedig E_2. Bocsássunk merőlegest O_2-ből O_1E_1-re, a merőleges talppontját jelölje T. A derékszögű O_1O_2T háromszögben $O_1O_2=9+4=13$ cm, $O_1T=9-4=5$ cm. Így a Pitagorasz-tétellel $O_2T=\sqrt{13^2-5^2}=12$ cm.



Mivel $TO_2E_2E_1$ téglalap, ezért $E_1E_2 = O_2T = 12$ cm.

b) Az O_1CE_1 és az O_2CE_2 háromszögek hasonlóak, mivel megfelelő oldalaik párhuzamosak. Az O_2C szakasz hosszát jelölje x. Ekkor a két háromszög megfelelő oldalainak aránya: $\frac{13+x}{9} = \frac{x}{4}$, ahonnan $x = 10{,}4$, az O_2C szakasz hossza tehát valóban 10,4 cm.

c) *I. megoldás.* Az AB szakasz felezőpontját jelölje F. $CF = 9 + 9 + 4 + 10{,}4 = 32{,}4$ cm.

Az AFC és az O_2E_2C háromszögek hasonlóak, mert egyik hegyesszögük közös, és mindkettőnek van egy derékszöge, így szögeik megegyeznek. Az AF szakasz hosszát jelölje y. Ekkor a két háromszög megfelelő oldalainak aránya: $\frac{AF}{CF} = \frac{E_2O_2}{CE_2}$. A Pitagorasz-tételből $CE_2 = \sqrt{10{,}4^2 - 4^2} = 9{,}6$ cm. $\frac{y}{32{,}4} = \frac{4}{9{,}6}$, ahonnan $y = 13{,}5$, az AF szakasz hossza tehát 13,5 cm.

A háromszög területe tehát

$$T = \frac{AB \cdot CF}{2} = \frac{2AF \cdot CF}{2} = \frac{27 \cdot 32{,}4}{2} = 437{,}4 \text{ cm}^2.$$

II. megoldás. Jelölje a háromszög szárai által bezárt szöget 2α. Ekkor $\sin\alpha = \frac{4}{10{,}4} = \frac{5}{13}$ ($\approx 0{,}385$). Mivel α hegyesszög, azért

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\frac{5}{13}}{\sqrt{1-\frac{25}{169}}}\,\frac{\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{5}{12}$$

(így $2\alpha \approx 45{,}24°$).

Így $AF = CF \cdot \operatorname{tg}\alpha = 32{,}4 \cdot \frac{5}{12} = 13{,}5$ cm. A Pitagorasz-tételből

$$AC = \sqrt{13{,}5^2 + 32{,}4^2} = 35{,}1 \text{ cm}.$$

A háromszög félkerülete:

$$s = \frac{27 + 2 \cdot 35{,}1}{2} = 48{,}6 \text{ cm},$$

területe $T = \varrho s = 9 \cdot 48{,}6 = 437{,}4$ cm^2.

9. *Egy nyolcpontú összefüggő, egyszerű gráf csúcsai A, B, C, D, E, F, G és H. Az A, B, C és D csúcsok fokszámai (ebben a sorrendben) egy növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai. Ehhez hasonlóan az E, F, G és H csúcsok fokszámai (ebben a sorrendben) egy másik növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai. A nyolc csúcs fokszámai között két egyenlő van, a többi fokszám mind különböző, továbbá A fokszáma kisebb E fokszámánál.*

a) Rajzoljuk fel ezt a gráfot. (*6 pont*)

Egy szabályos nyolcszög két szomszédos csúcsa a derékszögű koordináta-rendszerben $A(0; 0)$ és $B(10; 0)$. A nyolcszög az I. és a II. síknegyedben helyezkedik el.

b) Írjuk fel a szabályos nyolcszög beírható körének egyenletét. (*4 pont*)

c) Igazoljuk, hogy a $P(17; 17)$ pont a nyolcszögnek belső, beírható körének viszont külső pontja. (*6 pont*)

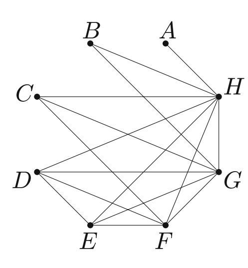
Megoldás. *a*) Mivel a gráf összefüggő és egyszerű, a csúcsok fokszámai 1, 2, 3, 4, 5, 6 és 7 lehetnek.

E számokból a következő növekvő számtani sorozatokat lehet összeállítani:

$$\begin{array}{cccc} 1, & 3, & 5, & 7; \\ 1, & 2, & 3, & 4; \\ 2, & 3, & 4, & 5; \\ 3, & 4, & 5, & 6; \\ 4, & 5, & 6, & 7. \end{array}$$

Az öt sorozat között csak kettő olyan van, amelyeknek csak egy közös elemük van, ezért a gráf fokszámsorozata (A-tól H-ig) 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 7.

Ha H fokszáma 7, akkor ez a csúcs az összes többivel össze van kötve. Mivel A fokszáma 1, ezért A-ból H-n kívül más csúcsba nem vezet él.



G fokszáma 6, ezért G az A-n kívül az összes többi csúccsal össze van kötve. Mivel B fokszáma 2, ezért B-ből a G-n és H-n kívül más csúcsba nem vezet él. F fokszáma 5, ezért F az A-n és B-n kívül az összes többi csúccsal össze van kötve. Mivel C fokszáma 3, ezért C-ből az F-en, G-n és H-n kívül más csúcsba nem vezet él. Végül D és E fokszáma 4, ezért ezek egymással, valamint az F, G és H csúcsokkal vannak összekötve.

b) A szabályos nyolcszög egy belső szöge 135 fokos, így külső szögei 45 fokosak. Ezért BC oldala egy $+1$ meredekségű egyenes egy szakasza.

A 10 egység hosszú BC oldal egy olyan egyenlő szárú, derékszögű háromszög átfogója, melynek befogói így $5\sqrt{2}$ egység hosszúak. Ezért $C\big(10+5\sqrt{2};5\sqrt{2}\,\big)$.

A nyolcszög további oldalai is vagy párhuzamosak valamelyik koordináta-tengellyel, vagy pedig egy $+1$ vagy -1 meredekségű egyenesen helyezkednek el. Így a további csúcsok koordinátái: $D\big(10+5\sqrt{2};10+5\sqrt{2}\,\big)$, $E\big(10;10+10\sqrt{2}\,\big)$, $F\big(0;10+10\sqrt{2}\,\big)$, $G\big(-5\sqrt{2};10+5\sqrt{2}\,\big)$ és $H\big(-5\sqrt{2};5\sqrt{2}\,\big)$.

A nyolcszögbe írható kör középpontja az AE szakasz felezőpontja: $K\big(5;5+5\sqrt{2}\,\big)$. A kör sugara megegyezik a K pont második koordinátájával: $r=5+5\sqrt{2}$. A kör egyenlete:

$$(x-5)^2+\big(y-\big(5+5\sqrt{2}\,\big)\big)^2=\big(5+5\sqrt{2}\,\big)^2\ \big(=75+50\sqrt{2}\,\big).$$

c)

$$PK^2=(17-5)^2+\big(17-\big(5+5\sqrt{2}\,\big)\big)^2=12^2+\big(12-5\sqrt{2}\,\big)^2=$$
$$=338-120\sqrt{2}\,.$$

Megmutatjuk, hogy ez nagyobb, mint a kör sugarának a négyzete, és ekkor P valóban külső pontja a körnek:

$$338-120\sqrt{2}>75+50\sqrt{2}\,,\quad 263>170\sqrt{2}\,,\quad \text{azaz}\quad \frac{263}{170}>\sqrt{2}\,.$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség igaz, mert a bal oldal nagyobb, a jobb oldal pedig kisebb 1,5-nél.

Másrészt $17<10+5\sqrt{2}$ ekvivalens $1{,}4<\sqrt{2}$-vel, ami (például a négyzetre emeléssel kapott $1{,}96<2$ miatt) szintén igaz. Ezért P első koordinátája kisebb a C és D csúcsok első koordinátájánál (de nagyobb a többi csúcs első koordinátájánál), valamint kisebb a D és G csúcsok második koordinátájánál (de nagyobb a C és H csúcsok második koordinátájánál), ezért P a $CDGH$ téglalapnak, így a nyolcszögnek is belső pontja.