I. rész

1. Oldjuk meg a következő egyenleteket a valós számok halmazán:
a) $\cos 2x + 3 \cdot \cos x - 1 = 0$, (*7 pont*)
b) $\sqrt{6-x} - \sqrt{5-2x} = 1$. (*6 pont*)

2. A nem is olyan távoli jövőben a fizika fakultációsok online szimulációban vizsgálhatják töltött részecskék viselkedését mágneses mezőben, ahol a részecskék helyzetét derékszögű koordináta-rendszer segítségével írják le. Két fizika fakultációs diák, Hácé és Kácé fontos kísérletet tervez: egy háromszög csúcsaiba $\big(A(-2;1);\ B(10;6);\ C(4;9)\big)$ Kácé három detektort helyez. Hácé ekkor egy töltött részecskét juttat a háromszög súlypontjába. A töltött részecske tömege peti-ben (peti: tömegegység a szimulációban) a háromszög területének és a $BAC\sphericalangle$ cosinusának szorzata. Határozzuk meg a háromszög súlypontjának koordinátáit és a részecske tömegének pontos értékét. (*12 pont*)

3. Pébé tanár úr, a C osztály osztályfőnöke lelkesen érkezett a reggeli órára.
– Képzeljétek, megálmodtam a matematika emelt szintű érettségi átlagunkat!
– És mennyi volt, tanár úr?
– Azt sajnos elfelejtettem, de emlékszem, hogy a D-sek átlaga szabályos közelítéssel 84,3, az E-seké 85,1, a három osztály átlaga pedig 87,9 volt. Tudjuk, hogy a D-ből 11-en, az E-ből 14-en, tőlünk pedig 24-en írnak emelt szintű érettségit. Ebből már ki lehet számolni az osztályátlagot.

a) Mennyi a C-sek osztályátlaga egy tizedesjegyre kerekítve, ha minden diák érettségi eredménye csak egész százalék lehet? (*8 pont*)

A Szalagavató nyitótáncában a C-sek 20%-a, a D-sek 25%-a vesz részt. Az egyik szünetben 4 fő C osztályos és 2 fő D osztályos tanuló vásárolt pizzát a büfében.

b) Mennyi annak a valószínűsége, hogy közülük pontosan ketten táncolnak a nyitótáncban? (*6 pont*)

4. Adottak az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 8$ és a $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 4 - 2x$ függvények.
a) Adjuk meg a $g \circ f$ függvény $x = 2$ abszcisszájú pontjába húzott érintő egyenletét. (*7 pont*)
b) Adjuk meg a $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f}{g}$ határértéket. (*5 pont*)

II. rész

5. Két birkózó egyesület közös bajnokságra készül. A felkészülés során előírás a napi 8 óra alvás. A korábbi felkészülések során kiderült, hogy a felkészülés hatékonyságát jelentősen befolyásolja a regenerálódásra fordított idő. A szakemberek megállapították, hogy a hatékonyságot az $E(t) = t^3 \cdot (3{,}2 - t)$ függvénnyel lehet leírni, ahol t a regenerálódásra fordított idő.

a) Mennyi időt fordítsanak a regenerálódásra, hogy a felkészülés a lehető leghatékonyabb legyen? (*8 pont*)

A bajnokságot kieséses rendszerben folytatják le, a párokat minden egyes mérkőzés előtt véletlenszerűen sorsolják. Az első pár sorsolásakor $\frac{7}{40}$ a valószínűsége annak, hogy mindkét versenyző az A egyesület tagja. Két mérkőzés után, ahol egy résztvevőt az A, három résztvevőt pedig a B egyesületből sorsoltak ki, ugyanakkora valószínűséggel sorsolják mindkét versenyzőt az A egyesületből, mint a B egyesületből.

b) Hányan indultak a bajnokságon az egyes egyesületekből? (*8 pont*)

6. Egy paralelogramma alakú füves terület oldalai 50 m és 34 m, az oldalak végpontjait összekötő átló 56 m hosszú. Az átló egy pontjába egy önműködő locsoló berendezést helyezünk, amely a terület bármely pontjából eléri bármely másik pontját, és ha a távolságot beállítottuk, akkor egy körön belül mindent lelocsol.

a) Legalább mekkora területet kell kézzel locsolni, ha a locsoló berendezés a terület határán túl nem locsolhat? (*10 pont*)

A füves területen egy kör alakú virágágyást alakítanak ki. A virágágyást két egyenes gyalogút szeli át, amelyek egy a körön kívüli P pontban metszik egymást. A virágágyást az egyik gyalogút az A és B, a másik gyalogút a C és D pontokban metszi. Tudjuk, hogy $PA = 3$ m, $AB = 5$ m, valamint $PD = PC + 10$ m.

b) Mekkora a PD távolság? (*6 pont*)

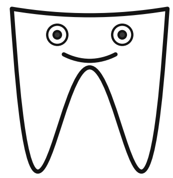
7. *a*) Bizonyítsuk be, hogy a szomszédos páratlan számok reciprokainak különbsége egyenlő a számok szorzata reciprokának kétszeresével. (*4 pont*)

Adott az $\dfrac{1}{1\cdot 4} + \dfrac{1}{4\cdot 7} + \dfrac{1}{7\cdot 10} + \ldots$ végtelen sor.

b) Bizonyítsuk be, hogy az n-edik részletösszeg:
$$S_n = \frac{n}{3n+1}.$$
(*8 pont*)

c) Adjuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n)$ határértéket. (*4 pont*)

8.
Az *ábrán* egy nemzetközi fogász kongresszus emblémája látható.



Az alakzatot az alábbi függvények grafikonjai határolják:

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto \frac{1}{4}x^4-2x^2+2 \quad \text{és} \quad g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto \frac{1}{36}x^2+4.$$

a) Határozzuk meg a függvények grafikonjainak metszéspontjait. (*2 pont*)

b) Mekkora az embléma területe, ha a koordináta-rendszer 1 egysége a valóságban 1 cm-nek felel meg?

A konferencián egy asztalhoz került hat fogorvos, akik örömmel állapították meg, hogy valamennyien részt vesznek egy programban, amelyben hasznos kezelési eljárásokat osztanak meg egymással. Ennek keretében a hat fogorvos is kapcsolatban áll egymással, mindegyik mindegyikkel. A kapcsolattartás két hálózaton keresztül folyik, de két fogorvos egymás között mindig ugyanazon a hálózaton kommunikál. (*8 pont*)

c) Bizonyítsuk be, hogy az asztalnál helyet foglaló hat fogorvos között van három olyan, aki egymás közt ugyanazon a hálózaton kommunikál. (*6 pont*)

9. Egy függönytartó rúd kúpban végződik. Rögzítő elemként egy R sugarú gömböt kúposan átfúrunk úgy, hogy pontosan illeszkedjen a rúd végére, majd az így kapott testet ráhúzzuk úgy, hogy a kúp tengelye átmenjen a gömb középpontján. A rögzítőelem magassága 7 cm, a felső alapköre $r_1=3$ cm, az alsó alapköre $r_2=4$ cm sugarú.

a) Határozzuk meg a rögzítőelem felszínét és térfogatát. (*10 pont*)

Az áruházban a függönytartó rudakat négyféle színben (arany, ezüst, fehér, fekete), a rögzítőelemet háromféle színben (arany, zöld és piros), a függönyöket ötféle színben (arany, ezüst, fehér, zöld, piros) árulják.

b) Hányféle kombinációt lehet összeállítani, ha az az előírás, hogy legalább az egyik elem aranyszínű legyen és a rúd két végén lévő rögzítőelem azonos színű? (*6 pont*)