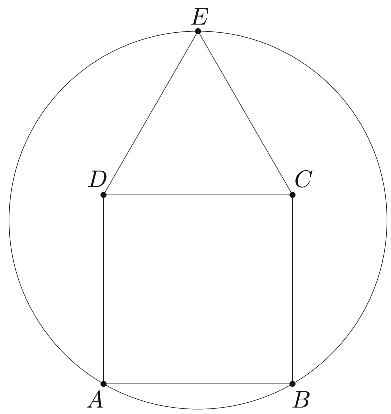
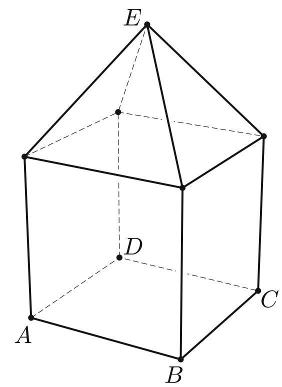
I. rész

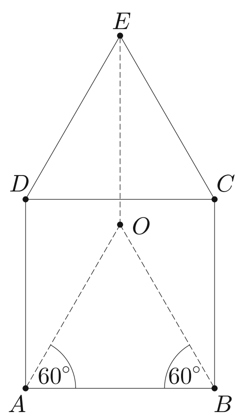
1. *a*) *A* bal oldali ábrán *egy* 1 cm *oldalhosszú négyzet és rajta egy* 1 cm *oldalhosszú szabályos háromszög látható. Mekkora annak a körnek a sugara, amely átmegy az* A*,* B*,* E *pontokon?* (*5 pont*)

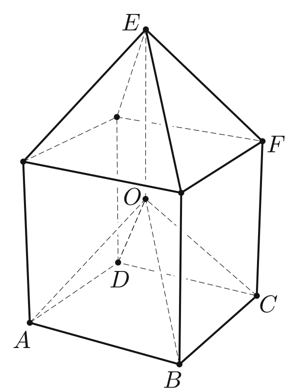




b) *A* jobb oldali ábrán *egy* 1 cm *élhosszú kocka és rajta egy olyan* 1 cm *élhosszú szabályos gúla látható, amelynek minden oldallapja szabályos háromszög. Mekkora annak a gömbnek a sugara, amely átmegy az* A*,* B*,* C*,* D*,* E *pontokon?* (*7 pont*)

Megoldás. *a*) Toljuk el DCE szabályos háromszögünket a $\overrightarrow{CB}$ vektorral. A háromszög képe az eltolás után az ABO szabályos háromszög ($A = D'$, $B = C'$, $O = E'$) lesz; emiatt $OA = OB = 1$. Másfelől mivel $O = E'$ ezért $OE = 1$; azaz O pont az A, B, E köréírt körének a középpontja, és a kör sugara 1 cm.





b) Voltaképpen ugyanazt csináljuk, mint két dimenzióban. Jelöljük a kocka C „fölötti" csúcsát F-fel, és toljuk el a térben a szabályos gúlánkat az $\overrightarrow{FC}$ vektorral. Ekkor a gúla képe az eltolás után az $ABCDO$ szabályos gúla lesz (ahol $O = E'$ az E pont eltolt képe). Mivel $ABCDO$ a megfelelő szabályos gúla képe, ezért $AO = BO = CO = DO = 1$, míg $O = E'$ miatt $EO = 1$, azaz az O pont egyenlő távolságra van A, B, C, D, E pontoktól, vagyis ezen pontok köréírható gömbjének a középpontja, és a gömb sugara 1 cm.

Megjegyzés. A feladat megoldható számolással is, de mi nem ezt az utat követtük.

2. *Egy* 2019 *mezőből álló játéktáblánk van a következő* ábra *szerint:*

1	2	3	4	5	1	2	...

(*Az* $1, 2, 3, 4, 5$ *számok vannak rajta ciklikusan, összesen* 2019 *hosszan.*) *Az* 1*-es mezőről indulunk, és minden mezőről annyit lépünk jobbra, amennyi az ott lévő szám.*

a) *Összesen hányra lépünk rá a mezők közül?* (*4 pont*)

b) *Mennyi azon mezők számainak összege, amire nem lépünk rá?* (*3 pont*)

c) *A játékszabályokat a következőképpen módosítjuk: egy szabályos hatoldalú kockával dobunk, ha a dobás eredménye az* 1 *és* 5 *közötti* d *szám, akkor az első mező, amire rálépünk az első* d*; míg ha a dobás hatos, akkor az első* 1*-esre lépünk, és innentől kezdve minden mezőről annyit lépünk jobbra, amennyi az ott lévő szám. Az első száz mező közül várhatóan hány mezőt látogatunk meg?* (*4 pont*)

Megoldás. *a*) Megvizsgálva az első pár lépést azt kapjuk, hogy az első tizenegy mező közül rendre az $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3$ (ez már a második 3-as) $\Rightarrow 1$ (ez már a harmadik 1-es) lépünk. Mivel innen ciklikusan ismétlődnek a mezők, tíz egymás utáni mezőből pontosan 4-re lépünk rá. $2019 = 201 \cdot 10 + 9$, azaz lesz 201 darab teljes ciklusunk, valamint további 9 mezőnk. Az utolsó 9 mező közül 4-re lépünk rá, így összesen $201 \cdot 4 + 4 = 808$ mezőre lépünk rá.

b) Egy teljes ciklusban a meg nem látogatott mezők összege: $3 + 5 + 1 + 2 + 4 + 5 = 20$, míg az utolsó 9 mező közül (hiányzik egy 5-ös a teljes ciklushoz) a meg nem látogatottak összege csak 15. Azaz azon mezők összege, amire nem lépünk rá: $201 \cdot 20 + 15 = 4035$.

c) A módosított szabályok szerint $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ eséllyel az első 1-es mezőről indulok, míg az első 2-es, ..., 5-ös mezőről indulás esélye $\frac{1}{6}$. Az 1-es, 2-es, 3-as, 4-es mezőről indulva rendre ugyanazt az $1, 2, 4, 3$ ciklust kapjuk, csak az elején, illetve a végén különböznek. Ez alapján $1, 2, 3, 4$-gyel kezdve az első 100 mező közül rendre 40, 39, 40, 38 mezőre lépünk rá; míg az első 5-ösből indulva pontosan az 5-ösöket látogatjuk meg, így összesen 20 darab mezőt. Innen a meglátogatott mezők várható száma:

$$\frac{2 \cdot 40 + 39 + 40 + 38 + 20}{6} = \frac{217}{6} \approx 36{,}17.$$

3. *Piszkos Fred a kapitány hosszú tengeri útra indul hajójával. Egy 100 literes hordóban tiszta alkoholt visz magával. Fred a hordóból minden éjfélkor megiszik 5 liter löttyöt, majd felmegy a hídra és a hajó kormánykerekét eltekeri 30°-kal. Ezek után visszavonul a kabinjába és a következő éjfélig alszik. A matrózok minden nappal során feltöltik a hordót esővízzel, de a kormánykerékhez nem nyúlnak. Ha a hordó alkoholtartalma 50% alá csökken és a kapitány iszik belőle, akkor kijózanodik.*

a) Az indulás után hanyadik éjfélkor józanodik ki Fred? *(4 pont)*

Fred fogadott egy hordó rumba Watson kapitánnyal, hogy az ő hajója gyorsabb, mint Watson fregattja. A verseny április elsején 23 óra 59-kor indult. A két hajó egyszerre indult el a nyugati irányban pontosan 10 000 kilométerre lévő közös célpont, a Rejtő-fok felé. Watson hajója állandó 8 csomó sebességgel haladt, míg Fred teknője 6 csomóval. (1 csomó sebesség megegyezik 1,85 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$-val.) Fred amíg részeg, minden páros sorszámú nap éjfélén balra tekeri 30°-kal a kormánykereket, míg a páratlan sorszámú napokon jobbra; amikor viszont kijózanodik, akkor azonnal a megfelelő irányba állítja a kormánykereket (és a helyes irányt a továbbiakban tartja is). A józan Piszkos Fred továbbá minden éjfélkor képes a hajó aktuális sebességét 10%-kal növelni (és ezt az egész következő nap tartani).

b) Melyik kapitány nyeri a fogadást? *(9 pont)*

Megoldás. *a*) A feladat szövege alapján az indulás időpontjában $a_0 = 1$ (azaz 100%) a hordó alkoholtartalma. Mivel minden újabb időpontban elfogy 5 liter lötty, amit 5 liter 0%-os alkoholtartalmú vízzel pótoltak, így n nap múlva a hordó alkoholtartalma: $a_n = 0{,}95^n$. A kapitány akkor józanodik ki, ha $a_n < 0{,}5$ lesz. A megfelelő egyenletet megoldva: $0{,}95^n = 0{,}5 \Rightarrow n = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}95} \approx 13{,}51$; mivel a $0{,}95^x$ függvény szigorúan monoton csökken ez azt jelenti, hogy $a_{13} > 0{,}5$, de $a_{14} < 0{,}5$, azaz Fred pontosan az indulás után két héttel józanodik ki.

b) Először számoljuk ki, hogy az egyenletes sebességgel pontosan a cél irányába mozgó Watson mennyi idő alatt éri el a Rejtő-fokot.

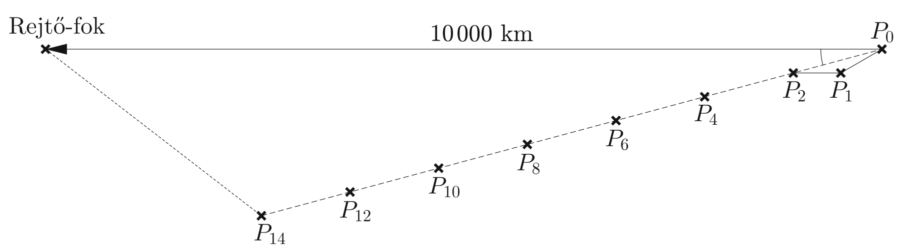
$$v_w = 8 \cdot 1{,}85\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 14{,}8\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \Rightarrow t_w = \frac{10\,000\ \text{km}}{14{,}8\ \frac{\text{km}}{\text{h}}} \approx 675{,}68\ \text{h} \approx 28\ \text{nap és}\ 3{,}68\ \text{h}$$

alatt ér célba.

Most lássuk mit csinált eközben Fred. Fred sebessége kezdetben

$$v_F = 6 \cdot 1{,}85\ \frac{\text{km}}{\text{h}} = 11{,}1 \frac{\text{km}}{\text{h}} \Rightarrow s = 11{,}1 \cdot 24 = 266{,}4\ \text{km-t}$$

tesz meg 1 nap alatt Piszkos Fred. Használjuk a következő *ábra* jelöléseit.



Jelölje $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_{14}$ Fred hajójának a pozícióját rendre a startnál, illetve $1, 2, \ldots$ és 14 nap múlva. Mivel a párosadik napokon balra, a páratlanadik napokon jobbra fordítja el a kormányt Fred, ezért minden második nap pontosan nyugat felé halad a hajó, illetve két ilyen napot „összevonva” egy olyan rombusz két szomszédos oldalán halad végig Fred teknője, amelynek oldalai 266,4 km hosszúak és az általuk bezárt szög 150°. Innen két másodszomszédos éjféli időpont pozíciója között (pl. P_0 és P_2, vagy P_{12} és P_{14} között) a távolság számítható koszinusz-tétellel:

$$P_0P_2^2 = 266{,}4^2 + 266{,}4^2 - 2 \cdot 266{,}4 \cdot 266{,}4 \cdot \cos 150° \approx 264\,859{,}8 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P_0P_2 \approx 514{,}645 \text{ km}.$$

Azaz két hét alatt Fred a starttól $514{,}645 \cdot 7 = 3602{,}515$ km-re került és pontosan 15°-kal tért el a nyugati iránytól.

Számítsuk ki egy újabb koszinusz tétellel, mennyi út van még hátra (a pontos irányt hagyjuk meg a Kapitánynak). A hátralévő útra:

$$s_F^2 = 10\,000^2 + 3602{,}515^2 - 2 \cdot 10\,000 \cdot 3602{,}515 \cdot \cos 15° \approx 43\,382\,869 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow s_F \approx 6586{,}567 \text{ km}$$

út van még hátra két hét után.

Lássuk, mennyi idő alatt teszi meg a józan Fred ezt az utat. Jelöljük b_n-nel a két hét utáni n-edik napon Fred hajója által megtett utat (kilométerben). Ekkor $b_n = 266{,}4 \cdot 1{,}1^{n-1}$. Az első n nap során ekkor

$$s_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = 266{,}4 \cdot \frac{1{,}1^n - 1}{1{,}1 - 1} = 2664(1{,}1^n - 1) = 2664 \cdot 1{,}1^n - 2664 \text{ km-t}$$

tesz meg. Azt keressük, hogy mikor lesz $s_n = 6586{,}567$.

$$s_n = 2664 \cdot 1{,}1^n - 2664 = 6586{,}567 \Rightarrow 2664 \cdot 1{,}1^n = 9250{,}567 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1{,}1^n = \frac{9250{,}567}{2664} \Rightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{9250{,}567}{2664}\right)}{\ln 1{,}1} \approx 13{,}061.$$

Mivel az $1{,}1^x$ függvény szigorúan monoton növő, ezért ez azt jelenti, hogy (kijózanodása után) 13 nap alatt még nem ér célba Fred, de a 14-dik, vagyis összességében a 28-dik napon már eléri a Rejtő-fokot.

Azaz Piszkos Fred nyeri a fogadást (és így a hordó rumot), hiszen körülbelül egy nappal korábban ér a célba, mint Watson.

a) Igazoljuk, hogy az $A_1A_2A_3$, a $B_1B_2B_3$, valamint a $C_1C_2C_3$ háromszögek mind derékszögű háromszögek. *(4 pont)*

b) Igazoljuk, hogy az A_3, B_1, B_2, valamint a B_3, C_1, C_2, illetve a C_3, A_1, A_2 ponthármasok rendre egy-egy egyenesre esnek. *(3 pont)*

c) A park építésze egy „különleges” helyre kutat szeretne fúratni. Úgy tűnik neki, hogy a parkot alkotó három kör egy közös pontban metszi egymást (ami eléggé különleges lenne). Igaza van-e az építésznek? Ha igen, pontosan hol van ez a pont? *(8 pont)*

Megoldás. *a)* Az ábra alapján úgy tűnik, hogy a háromszögek olyan háromszögek, ahol a 2-es indexű csúcs szöge derékszög, míg a másik két csúcsot összekötő átfogó egyben a kör átmérője is. Ezt fogjuk igazolni.

Az A_1, A_3 pontok távolsága 10, az O_A felezőpontjuk koordinátái: $O_A(-2;-2)$. Ez a felezőpont pedig pontosan 5 távolságra van A_2-től, azaz ez a háromszög egyenlőszárú és derékszögű háromszög, és a köréírt kör sugara 5.

Hasonlóan a C_1, C_3 pontok távolsága 6, az O_C felezőpontjuk koordinátái: $O_C(2;4)$. Ez a felezőpont pedig pontosan 3 távolságra van C_2-től, azaz ez a háromszög is egyenlőszárú és derékszögű háromszög, és a köréírt kör sugara 3.

Míg a B_1, B_3 pontok távolsága Pitagorasz tételével: $\sqrt{8^2+6^2} = 10$, az O_B felezőpontjuk koordinátái: $O_B(5;-3)$. Ez a felezőpont pedig pontosan 5 távolságra van B_2-től, azaz ez a háromszög is derékszögű háromszög (de nem egyenlőszárú), és a köréírt kör sugara 5.

b) Azt fogjuk használni, hogy ha a P, Q, R pontokra igaz az, hogy $\overrightarrow{PQ} = c \cdot \overrightarrow{PR}$ valamely c valós számra, akkor a három pont egy egyenesre esik.

Az A_3, B_1, B_2 pontokra: $\overrightarrow{A_3B_1} = (3;1)$, míg $\overrightarrow{A_3B_2} = (12;4) = 4 \cdot \overrightarrow{A_3B_1}$, azaz A_3, B_1, B_2 valóban egy egyenesre esnek.

A B_3, C_1, C_2 pontokra: $\overrightarrow{B_3C_1} = (-4;4)$, míg $\overrightarrow{B_3C_2} = (-7;7) = \frac{7}{4} \cdot \overrightarrow{B_3C_1}$, azaz a B_3, C_1, C_2 pontok is egy egyenesre esnek.

A C_3, A_1, A_2 pontokra: $\overrightarrow{C_3A_1} = (-1;-1)$, míg $\overrightarrow{C_3A_2} = (-6;-6) = 6 \cdot \overrightarrow{C_3A_1}$, azaz a C_3, A_1, A_2 pontok is egy egyenesre esnek.

c) Az *a)* pont alapján a körök egyenletei rendre: $k_A\colon (x+2)^2 + (y+2)^2 = 25$; $k_B\colon (x-5)^2 + (y+3)^2 = 25$; $k_C\colon (x-2)^2 + (y-4)^2 = 9$.

Számítsuk ki k_A és k_B metszéspontjait. Ezekre a metszéspontokra igaz:

$$(x+2)^2 + (y+2)^2 = (x-5)^2 + (y+3)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 14x - 26 = 2y \Rightarrow y = 7x - 13.$$

Ezt a (hatványvonal) egyenletet visszahelyettesítve mondjuk k_A egyenletébe kapjuk:

$$(x+2)^2+(7x-11)^2=25 \Rightarrow x^2+4x+4+49x^2-154x+121-25=0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 50x^2-150x+100=0 \Rightarrow x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0.$$

Innen a k_A és k_B körök metszéspontjai: $(1;-6)$ és $(2;1)$.

Ha ezek közül bármelyik rajta van a harmadik körön, akkor készen vagyunk. Vizsgáljuk meg, hogy a $(2;1)$ pont koordinátái teljesítik-e a harmadik köregyenletet. $(2-2)^2+(1-4)^2=0^2+(-3)^2=9$, azaz ez a metszéspont rajta van a k_C körön is (a másik metszéspont nincs rajta).

Ezzel megvagyunk, a három kör valóban egy közös pontban, a $(2;1)$ pontban metszi egymást.

II. rész

5. *a) Adjuk meg a* $h(x)=\cos 2x-\sin 2x+2\sin^2 x+1$ *függvény szélsőértékeit. Hol veszi fel a szélsőértékeit a függvény?* *(6 pont)*

b) Legyen $f(x)=x^2-2x+2$, *míg a* $g_n(x)$ *a következőképpen definiált függvény-sorozat:*

$$g_1(x)=f(x); \quad g_n(x)=f\big(g_{n-1}(x)\big) \ (ha\ n\ge 2).$$

Adjuk meg $g_{2019}\left(\frac{3}{2}\right)$ *tizedesvessző utáni első 100 számjegyét.* *(10 pont)*

Megoldás. *a)* A duplaszögek addíciós képleteivel:

$$\begin{aligned} h(x)&=\cos 2x-\sin 2x+2\sin^2 x+1=\\ &=\cos^2 x-\sin^2 x-2\sin x\cos x+2\sin^2 x+1=\\ &=\cos^2 x-2\sin x\cos x+\sin^2 x+1=(\cos x-\sin x)^2+1. \end{aligned}$$

Mivel $(\cos x-\sin x)^2\ge 0$, ezért $h(x)\ge 1$ és ezt az 1 minimumértéket $h(x)$ fel is veszi mindenütt, ahol $\cos x=\sin x\Rightarrow \operatorname{tg} x=1$, azaz a minimum helyei: $x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Maximum ott lehet, ahol a $j(x)=\cos x-\sin x$ különbségnek pozitív maximuma, vagy negatív minimuma van. Deriváljuk a $j(x)$ függvényt:

$$\begin{aligned} &j'(x)=-\sin x-\cos x,\\ &j'(x)=0\Leftrightarrow \sin x=-\cos x\Leftrightarrow \operatorname{tg} x=-1\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{4}+k\cdot\pi \quad (k\in\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

„Minden” esetben $j''(x)=-\cos x+\sin x\ne 0$, azaz ezek valódi szélsőértékei $j(x)$-nek, és mivel ezeken a helyeken $\left|j(x)\right|=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$, ezért minden ilyen helyre $(\cos x-\sin x)^2+1=j^2(x)+1=\left(\sqrt{2}\right)^2+1=3$.

Azaz $h(x)$ maximuma 3 és a maximumának helyei: $x=\frac{3\pi}{4}+k\cdot\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

b) Írjuk fel $f(x)$-t $f(x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$ alakban, és vizsgáljuk meg a $g_1(x), g_2(x), g_3(x), \ldots$ függvények értékeit $x=\frac{3}{2}$-nél.

$$g_1\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+1=\frac{1}{4}+1=\frac{1}{2^{2^1}}+1$$

(ezt ne is alakítsuk tovább);

$$\begin{aligned} g_2\left(\frac{3}{2}\right)&=f\left(g_1\left(\frac{3}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{4}+1-1\right)^2+1=\frac{1}{16}+1=\frac{1}{2^{2^2}}+1;\\ g_3\left(\frac{3}{2}\right)&=f\left(g_2\left(\frac{3}{2}\right)\right)=\left(\frac{1}{16}+1-1\right)^2+1=\frac{1}{256}+1=\frac{1}{2^{2^3}}+1. \end{aligned}$$

Mivel

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2^{2^n}}+1\right)&=\left(\frac{1}{2^{2^n}}+1-1\right)^2+1=\left(\frac{1}{2^{2^n}}\right)^2+1=\frac{1}{\left(2^{2^n}\right)^2}+1=\\ &=\frac{1}{2^{2^n\cdot 2}}+1=\frac{1}{2^{2^{n+1}}}+1, \end{aligned}$$

ezért adódik, hogy $g_n\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2^{2^n}} + 1$, azaz $g_{2019}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2^{2^{2019}}} + 1$.

Vizsgáljuk csak $\frac{1}{2^{2^{2019}}}$-t.

$$0 < \frac{1}{2^{2^{2019}}} < \frac{1}{2^{2019}} < \frac{1}{2^{334}} < \frac{1}{10^{100}}$$

(ez utóbbi $1024 = 2^{10} > 10^3 = 1000$ miatt igaz); azaz $\frac{1}{2^{2^{2019}}}$, és így $\frac{1}{2^{2^{2019}}} + 1 = g_{2019}\left(\frac{3}{2}\right)$ tizedesvessző utáni első száz jegye mind 0.

6. *Néhány vegyianyag-szállító kamionban különféle kóddal* (A, B, C, D, E, F, G, H) *ellátott palackokat szállítanak. A robbanásveszély miatt bizonyos palackokat nem szabad együtt szállítani. Ezeket a „tiltásokat" a következő táblázat tartalmazza:*

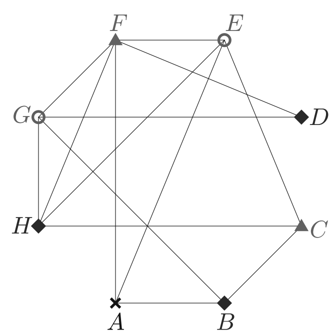
Vegyi anyag címkéje:	A	B	C	D
Ezzel nem szállítható:	B, E, F	A, C, G	B, E, H	F, G
Vegyi anyag címkéje:	E	F	G	H
Ezzel nem szállítható:	A, C, F, H	A, D, E, G, H	B, D, F, H	C, E, F, G

a) Legalább hány kamion kell, ha minden anyagból pontosan egy-egy palackot kell elszállítanunk? (Minden kamionba legfeljebb négy palack fér el.) *(6 pont)*

b) Hány kamion kell, ha minden anyagból pontosan 5-5 *palackot kell elszállítani? (Most is minden kamionba legfeljebb négy palack fér el.)* *(6 pont)*

c) Véletlenszerűen kiválasztva két különböző palackot mennyi az esélye annak, hogy azokat nem tehetjük egy kamionra? *(4 pont)*

Megoldás. *a*) Rajzoljuk meg a feladat gráfját (két vegyianyag-kódot akkor kötünk össze, ha a két palack nem szállítható együtt).



Színezzük ki a gráf csúcsait úgy, hogy bármely két olyan csúcs, amit él köt össze, különböző színt kapjon. Megmutatjuk, hogy bármely ilyen színezéshez legalább négy szín kell (azaz a gráf csúcs-kromatikus száma 4), ami azt jelenti, hogy legalább négy kamion kell a palackok szállításához. Indirekt tegyük fel, hogy a gráf csúcsai 3 színnel jól színezhetőek. Ekkor a teljes 3-klikket alkotó F, G, H csúcsoknál ezt a három színt fel is kell használnunk. Legyen F, G, H színe rendre zöld, piros és kék; (innen fonalasan) $\Rightarrow$ E színe csak piros, D színe csak kék, C színe csak zöld, B színe csak kék lehet (mert mindegyiknek van másik két színű szomszédja). Ekkor viszont A csúcsnak lesz piros (E), kék (B) és zöld (F) színű szomszédja is, vagyis A megszínezéséhez szükséges egy negyedik szín is. Ezzel igazoltuk, hogy a gráf csúcs-kromatikus száma legalább 4; 4 színnel pedig (mondjuk A-t sárgának választva) a csúcsok jól színezhetőek.

Az eddigiek alapján a szállításhoz legalább 4 kamion kell (az azonos színekkel jelölt palackok kerülnek egy kamionba). Egy lehetséges szétosztás:

1. kamion	2. kamion	3. kamion	4. kamion
A	B, H, D	C, F	E, G

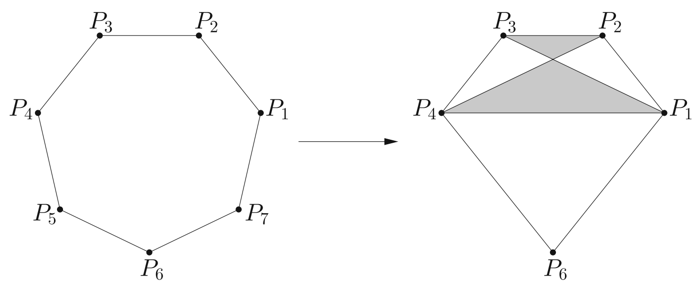
b) Mivel 40 palack van, ezért minimum 10 kamion kell. Ez viszont elég is, ahogyan a következő táblázat mutatja (*nagyon sok különböző megoldás lehet*).

1. kamion	2. kamion	3. kamion	4. kamion	5. kamion
$AAAH$	$BBBB$	$CCCC$	$AACD$	$DDDD$
6. kamion	7. kamion	8. kamion	9. kamion	10. kamion
$BEEF$	$EEEG$	$FFFF$	$GGGG$	$HHHH$

c) A feladat gráfjában 14 él van (a táblázatbeli bejegyzések száma 28, de a szimmetria miatt ez 14 párt jelent); azaz pontosan 14 pár olyan palack van, amik nem kerülhetnek össze. Innen a kérdéses valószínűség:

$$P = \frac{\text{„kedvező” párok száma}}{\text{összes párok száma}} = \frac{14}{\binom{8}{2}} = \frac{14}{28} = \frac{1}{2}.$$

7. *Egy cég gyémánt alakú emblémája olyan ötszög, melynek csúcsai egy szabályos hétszög megfelelő* (P_1, P_2, P_3, P_4, P_6) *csúcsai* (*lásd* jobb oldali ábra).



A cég 10 000 *darab az emblémával ellátott kitűzőt rendelt. A nyomdai költségekben két tétellel kell kalkulálni:* 10 000 *centiméternyi vonal megrajzolása* 50 *euróba kerül, míg* 10 000 cm^2*-nyi terület besatírozása* 200 *euróba.*

a) *Mennyi lesz a* 10 000 *kitűző nyomdai költsége, ha a szabályos hétszög egy-egy oldala* 2 cm *hosszú?* (*10 pont*)

b) *A cég piárosa úgy találta, hogy az embléma nem elég színes. Szeretné a gyémánt* 5 *összefüggő részében megjeleníteni a piros, a fehér és a zöld színeket. Hányféle különböző ilyen három színű emblémát kaphatunk, ha azt szeretnénk, hogy az élben szomszédos részek színe különböző legyen, valamint mind a három szín meg is jelenjen az emblémában?* (*6 pont*)

Megoldás. *a*) Számítsuk ki a szabályos hétszög kétféle átlójának a hosszát. Koszinusztétellel:

$$P_1P_3^2 = 2^2 + 2^2 - 2\cdot 2\cdot 2\cdot \cos\frac{900^\circ}{7} \approx 12{,}988 \Rightarrow P_1P_3 \approx 3{,}604,$$

míg

$$P_1P_4^2 = 2^2 + P_1P_3^2 - 2\cdot 2\cdot P_1P_3\cdot \cos\left(\frac{900^\circ}{7}\cdot\frac{4}{5}\right) \approx 20{,}196 \Rightarrow P_1P_4 \approx 4{,}494.$$

Innen a vonalak megrajzolásának költsége:

$$\approx (3\cdot 2 + 4\cdot 3{,}604 + 4{,}494)\cdot 50 = 24{,}91\cdot 50 = 1245{,}5 \text{ euró}.$$

Kiszámoljuk a satírozott részek területeit is. A P_1P_3 és P_2P_4 metszéspontját jelöljük O-val. P_2P_3O olyan egyenlőszárú háromszög, melynek P_2P_3 alapja 2 cm hosszú, míg alapján fekvő szögei nagysága: $\frac{180^\circ}{7}$, innen az alaphoz tartozó m magasságra: $\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{7}\right) = m \approx 0{,}4816$ és így

$$T_{P_2P_3O} \approx \frac{2\cdot 0{,}4816}{2} = 0{,}4816.$$

A P_1P_4O háromszög pedig hasonló P_2P_3O-hoz, és a hasonlóság aránya éppen $\lambda = \frac{P_1P_4}{P_2P_3} \approx \frac{4{,}494}{2} = 2{,}247$, innen $T_{P_1P_4O} \approx 2{,}247^2\cdot 0{,}4816 \approx 2{,}4314$. Innen a satírozás költsége: $\approx (0{,}4816 + 2{,}4314)\cdot 200 = 582{,}6$ euró.

Azaz a nyomdai összköltség hozzávetőlegesen: $1245{,}5 + 582{,}6 = 1828{,}1$ euró.

b) Jelöljük lentről felfele a részeket R_1, R_2, R_3, R_4, R_5-tel (R_2 az az egyetlen rész, amelynek 3 szomszédja van, az R_3, R_4 részek az egybevágó kisebb háromszögek.)

– R_2 kitöltésére 3 lehetőségünk van.

– Ha ekkor R_3 és R_4 színe különböző (ez kétféleképpen lehetséges), akkor R_5 színénél nincs választási lehetőségünk, ugyanazt a színt kapja R_5, mint R_2; viszont R_1-re két különböző színt is választhatunk. Az esetek száma itt $3\cdot 2\cdot 1\cdot 2 = 12$.

– Ha azonban R_3 és R_4 színe azonos (ez is kétféleképpen lehetséges), akkor eddig csak két színt használtunk fel, azaz vagy R_1, vagy R_5 (vagy mindkettő) színe a harmadik szín kell, hogy legyen. Ha csak R_1 kapja a harmadik színt, akkor R_5 színe egyértelmű, hasonlóan ha csak R_5 kapja a harmadik színt, akkor R_1 színe egyértelmű, és az is egyértelmű eset, ha mindkét területet a harmadik színnel színezem (ez így összesen háromféle lehetséges színezés); azaz ezen az ágon $3\cdot 2\cdot 3 = 18$ lehetséges eset van.

Összesen tehát $12 + 18 = 30$-féleképp lehet kiszínezni az emblémát.

8. *Egy speciális trópusi halaknak való felül nyitott, alul és oldalt üveg akváriumot építünk. Az akvárium paramétereire EU-előírások alapján a következőknek kell teljesülnie:*

– *Az akvárium térfogata* $1\ \mathrm{m}^3$ *kell, hogy legyen;*

– *az akvárium alapja olyan téglalap, melynél az oldalak aránya* $1:2$;

– *a négy oldalfal olyan üvegből készül, melynek ára* 90 *euró négyzetméterenként;*

– *az akvárium alsó lapja pedig olyan üvegből készül, melynek négyzetmétere* 120 *euróba kerül.*

Milyennek válasszuk az akvárium éleit, hogy a lehető legkevesebb legyen az anyagköltség, és az hány euró lesz? (*16 pont*)

Megoldás. Jelöljük az akvárium alaplapjának oldalait $x, 2x$-szel (a 2. feltétel alapján), míg a magasságát y-nal. Ekkor a feltételek alapján $V = 2x^2y = 1 \Rightarrow\Rightarrow y = \dfrac{1}{2x^2}$. Az anyagköltségfüggvényt $f(x, y)$-nak nevezve pedig teljesül:

$$f(x, y) = 2x^2 \cdot 120 + 2(2xy) \cdot 90 + 2(xy) \cdot 90 = 240x^2 + 540xy.$$

Ennek a költségfüggvénynek szeretnénk a (lokális) szélsőértékeit megtalálni.

$f(x, y)$-ba behelyettesítve $y = \dfrac{1}{2x^2}$-t a költségfüggvény már csak x-től függ: $f(x) = 240x^2 + \dfrac{270}{x}$.

$$f'(x) = 480x - \frac{270}{x^2},$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 480x = \frac{270}{x^2} \Rightarrow x^3 = \frac{270}{480} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{27}{48}} = \frac{3}{2\sqrt[3]{6}} \approx 0{,}8255.$$

Vizsgáljuk meg $f(x)$ második deriváltját is: $f''(x) = 480 + \dfrac{540}{x^2} > 0$, azaz a függvénynek a kapott helyen valóban lokális minimuma van. Számoljuk ki y-t:

$$y = \frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2 \cdot \dfrac{9}{4\sqrt[3]{36}}} = \frac{2\sqrt[3]{36}}{9} \approx 0{,}7338.$$

Azt kaptuk, hogy az optimális akvárium alapélei, illetve magassága (méterben): $x \approx 0{,}8255$; $2x \approx 1{,}651$; $y \approx 0{,}7338$ és ekkor a (minimális) anyagköltség: $f(x, y) \approx 490{,}6$ euró.

9. *Hány olyan* $0 < \dfrac{a}{b} < 1$ *és* $0 < \dfrac{c}{d} < 1$ $(a, b, c, d \in \mathbb{N}^+)$ *nem egyszerűsíthető közönséges tört van, hogy az*

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{c}{d}\right)$$

szorzat egész, valamint $a + b + c + d = 100$? (*16 pont*)

Megoldás. Mivel $\dfrac{a}{b}, \dfrac{c}{d}$ 0 és 1 közé esik, azért $1 < \left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{c}{d}\right) < 4$, azaz a szorzat csak 2, vagy 3 lehet. A két esetet külön vizsgáljuk.

Ha

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{c}{d}\right) = 2 \Rightarrow 1 + \frac{c}{d} = \frac{2b}{a + b} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{2b}{a + b} - 1 = \frac{b - a}{a + b}.$$

Ha a törtek nem egyszerűsíthetőek, akkor $c = b - a$, és $d = a + b$ kell, hogy teljesüljön, ráadásul a-nak és b-nek különböző paritásúnak kell lennie (mert különben c és d is páros, és így $\dfrac{c}{d}$ egyszerűsíthető lenne).

Mivel $a + b + c + d = 100 \Rightarrow a + b + b - a + a + b = a + 3b = 100 \Rightarrow a = 100 - 3b$. Innen ha b páratlan, akkor $a = 100 - 3b$ is páratlan; míg ha b páros, akkor a is páros. Ekkor viszont (bármelyik esetben) $c = b - a$ és $d = b + a$ is páros ellentmondásban azzal, hogy a $\dfrac{c}{d}$ tört nem egyszerűsíthető. Azaz ezen az ágon nem kapunk megoldást.

Ha

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{c}{d}\right) = 3 \Rightarrow 1 + \frac{c}{d} = \frac{3b}{a + b} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{3b}{a + b} - 1 = \frac{2b - a}{a + b}.$$

Ha a törtek nem egyszerűsíthetőek, akkor $c = 2b - a$, és $d = a + b$ kell, hogy teljesüljön.

Mivel $a + b + c + d = 100 \Rightarrow a + b + 2b - a + a + b = a + 4b = 100 \Rightarrow b = 25 - \dfrac{a}{4}$. Innen a 4-gyel osztható szám, míg b nagyobb, de legfeljebb kétszer akkora (az eddigiek alapján). A lehetőségeket a, b-re (és a számolt c, d-re) soroljuk fel egy táblázatban.

a	b	$c = 2b - a$	$d = b + a$	
4	24	44	28	a törtek egyszerűsíthetőek
8	23	38	31	$c > d$ így $c/d > 1$
12	22	32	34	a törtek egyszerűsíthetőek
16	21	26	37	ez megoldás
20	20	20	40	a törtek egyszerűsíthetőek, illetve $a \geq b$

Vagyis azt kaptuk, hogy az egyetlen megoldás: $a = 16$, $b = 21$, $c = 26$, $d = 37$.

Ezt leellenőrizve (a, b illetve c, d valóban relatív prímek)

$$\left(1 + \frac{16}{21}\right)\left(1 + \frac{26}{37}\right) = \left(\frac{37}{21}\right)\left(\frac{63}{37}\right) = \frac{63}{21} = 3.$$