

I. rész

1. a) Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek összege legfeljebb 4? (7 pont)
b) Hány olyan lesz ezek között a számok között, amely osztható 60-nal? (5 pont)

2. a) Egy osztályban egy matematika dolgozatnál a 6 kékszemű tanuló átlaga pontosan 3, a többi, nem kékszemű tanuló átlaga pontosan 4 lett. A 21 fiú átlaga pontosan 3,5, a lányok átlaga pontosan 4,5 lett. Határozzuk meg a dolgozat átlagát a teljes osztályban. (5 pont)

b) Az iskolai túraszakosztály a hétvégi kirándulásra különbuszt rendelt. A busz költséget a résztvevők között egyenlő arányban osztják szét. A kitűzött jelentkezési határidő egy hétfői napon járt le. Mivel maradt még szabad hely a buszban, ezért kedden még két jelentkezést elfogadtak, így az egy résztvevőre jutó busz költség 175 Ft-tal csökkent. Szerdán aztán még három jelentkezést elfogadtak, így az egy résztvevőre jutó busz költség további 225 Ft-tal csökkent. Így már megtelt a megrendelt autóbusz.

Hány jelentkezést fogadtak el összesen a kirándulásra, és mennyibe került a megrendelt különbusz? (8 pont)

3. a) Oldjuk meg az alábbi egyenlőtlenséget a valós számok halmazán:

$$4^x + 2 < 9 \cdot 2^{x-1}. \quad (6 \text{ pont})$$

- b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$\left| \frac{3}{2} - \sin x - 2 \cos^2 x \right| = \frac{1}{2}. \quad (7 \text{ pont})$$

4. a) Az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax + b$$

és a

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = (x - c)^2 + d$$

függvények grafikonjai az $M_1(-1; 10)$ és az $M_2(4; -5)$ pontokban metszik egymást. Határozzuk meg az a , b , c és d értékét. (7 pont)

- b) Határozzuk meg az

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x + 7$$

és a

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = (x + 3)^2 - 6$$

függvények által közrezárt síkidom területét. (6 pont)

II. rész

5. Egy felmérésben azt vizsgálták, az autósok hogyan viszonyulnak a téli gumiabroncsok használatához. A felmérésben 1800 autóst kérdeztek meg. Azok, akik használnak téli gumiabroncsokat, 1320-szal többen voltak, mint akik nem. Azok között, akik nem használnak téli gumiabroncsot, 40%-kal kevesebben voltak azok, akik ezt nem is tartják fontosnak, mint azok, akik ugyan fontosnak tartják, de anyagi okokból lemondanak róla.

- a) Ábrázoljuk a felmérés eredményét kördiagramon. (6 pont)

Egyes személyautókban az autó által megtett távolságot az autó műszerei úgy számítják ki, hogy a gumiabroncs ismert kerületét és a kerék által megtett fordulatok számát összeszorozzák.

Vera észrevette, hogy néhány év használat után az autó műszerei már pontatlanul mutatták a megtett távolságot: amíg az út melletti kilométerkövek tanúsága szerint pontosan 100 km-t tett meg, addig a műszerfal 101,2 km megtett utat jelzett. Ennek az volt az oka, hogy az autó gumiabroncsai a néhány év használat alatt kicsit elkoptak, így a kerületük csökkent. A katalógusok szerint a Vera autóján használt gumiabroncsok gyártáskori átmérője 632 mm volt. A műszerek – a kopást figyelmen kívül hagyva – mindvégig ebből az adatból határozták meg az autó által megtett távolságot.

- b) Hány millimétert kopott eddig Vera autója gumiabroncsának felülete? (5 pont)

A rendőrség közúti ellenőrzés-sorozatán vizsgálja az autók gumiabroncsát. Egy nyári gumiabroncs úgynevezett profilmélysége gyártáskor kb. 8 mm. Az érvényes jogszabályok szerint nem lehet közlekedni olyan gumiabronccsal, melynek a kopása olyan mértékű, hogy profilmélysége 1,6 mm alá csökken. Felmérések alapján feltételezhető, hogy minden tizenötödik autón a gumiabroncsok kopása ezt az értéket meghaladja. (Ezt úgy tekinthetjük, hogy minden egyes autó esetén $1/15$ annak a valószínűsége, hogy a kopás 1,6 mm alá csökkent.)

c) Egy járőrpáros egy napi szolgálat alatt 80 autó gumiabroncsainak kopását ellenőrzi. Határozzuk meg annak valószínűségét, hogy legalább 5 olyan autót találnak az ellenőrzés során, melynél a gumiabroncsok kopása meghaladja a jogszabályban előírt határértéket. (5 pont)

6. A valós számokon értelmezett $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + bx + c$ függvénynek lokális maximuma van $x = -2$ -nél.

a) Igazoljuk, hogy ekkor $b = -12$. (5 pont)

b) Határozzuk meg c lehetséges értékeit, ha tudjuk, hogy az f -nek három különböző zérushelye van. (7 pont)

c) Határozzuk meg az f zérushelyeit abban az esetben, ha $c = 0$. (4 pont)

7. A kanaszta nevű kártyajátékot két csomag francia kártyával játsszák. Egy csomag francia kártyában 55 lap található: négy szín (pikk, káró, kőr, treff) mindegyikében 13-13 lap (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, Bubi, Dáma, Király, Ász) van. Ezekon a lapokon kívül mindegyik csomagban van három Joker is. A pikk és treff színű lapok feketék, a káró és kőr színű lapok pirosak.

A játék elején az egyik játékos kettéválasztja a jól megkevert kártyacsomagot, és a csomag egyik felében az alsó három lapot megnézheti: ez az úgynevezett emelés. Ha a három lap között van „szerencsés” lap, akkor ezeket a szerencsés lapokat a játékos megkapja. Szerencsés lapnak számít a hat darab Joker, a nyolc darab 2-es (amit a kanasztában szintén Jokernek használnak) és a négy darab piros 3-as.

a) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy az emelést végző játékos nulla, egy, kettő, illetve három szerencsés lapot kap. (5 pont)

b) Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a kezdő játékosnak kiosztott első négy lap között mind a négy szín előfordul. (4 pont)

Egy szerencsejátékban 4 Király és 4 Ász közül visszatérés nélkül húz lapokat a játékos a játékos, egészen addig, amíg az első Ászt kihúzza. Ha az első Ász kihúzása előtt k darab Királyt húzott ki, akkor a játékos nyereménye $100k^2$ forint.

c) Határozzuk meg ebben a játékban a nyeremény várható értékét. (7 pont)

8. Az ABC egyenlőszárú háromszög alapja AB , beírt körének középpontja O_1 , a beírt kör sugara 9 cm. A háromszögben olyan kört írunk, mely érinti a beírt kört és a háromszög két szárát. Ennek a körnek a középpontja O_2 , sugara pedig 4 cm.

a) Határozzuk meg az egyik száron keletkező, a két kör érintési pontjai által meghatározott szakasz hosszát. (5 pont)

b) Igazoljuk, hogy $O_2C = 10,4$ cm. (4 pont)

c) Határozzuk meg a háromszög területét. (7 pont)

9. Egy nyolcpontú összefüggő, egyszerű gráf csúcsai A, B, C, D, E, F, G és H . Az A, B, C és D csúcsok fokszámai (ebben a sorrendben) egy növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai. Ehhez hasonlóan az E, F, G és H csúcsok fokszámai (ebben a sorrendben) egy másik növekvő számtani sorozat egymást követő tagjai. A nyolc csúcs fokszámai között két egyenlő van, a többi fokszám mind különböző, továbbá A fokszáma kisebb E fokszámánál.

a) Rajzoljuk fel ezt a gráfot. (6 pont)

Egy szabályos nyolcszög két szomszédos csúcsa a derékszögű koordináta-rendszerben $A(0; 0)$ és $B(10; 0)$. A nyolcszög az I. és a II. síknyelvedben helyezkedik el.

b) Írjuk fel a szabályos nyolcszög beírható körének egyenletét. (4 pont)

c) Igazoljuk, hogy a $P(17; 17)$ pont a nyolcszögnek belső, beírható körének viszont külső pontja. (6 pont)