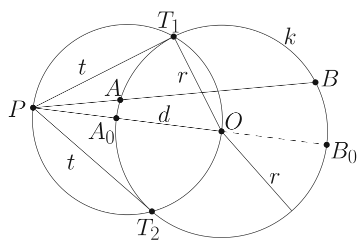
Hatványvonalak és hatványsíkok

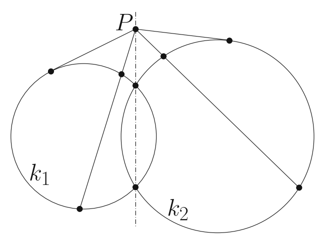
Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve", három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

A harmadik részben körök hatványvonalaival és gömbök hatványsíkjaival fogunk játszani. Legyen a k egy körvonal, a középpontja O, sugara r, és P tetszőleges pont a síkon, az O-tól d távolságra. Húzzunk P-n keresztül egy e egyenest, ami elmetszi k-t az A és B pontokban; a *szelőtétel* szerint a $PA \cdot PB$ előjeles szorzat nem függ az e választásától. Ezt a számot hívjuk a P pontnak a k körre vonatkozó *hatványának.*

Az *1. ábrán* az O-n átmenő szelőről leolvashatjuk, hogy a hatvány értéke $PA_0 \cdot PB_0 = (d-r)(d+r) = d^2 - r^2$. Ha P a körön kívül van, akkor a szelő két határhelyzete a két P-ből húzott érintő, ezért ha az érintő szakaszok hossza $PT_1 = PT_2 = t$, akkor a OPT_1 és OPT_2 derékszögű háromszögekből is megkaphatjuk, hogy a hatvány értéke $t^2 = d^2 - r^2$.



1. ábra



2. ábra

Ha nem egy, hanem két körünk van, k_1 és k_2, és a középpontjuk különböző, akkor azoknak a pontoknak a halmaza a síkon, amelyeknek a két körre vonatkozó hatványa egyenlő, egy egyenes; ezt az egyenest hívjuk k_1 és k_2 *hatványvonalának.* A hatványvonal merőleges a két kör centrálisára[1].

Térben, ha $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ két gömb a térben, és a középpontjuk különböző, akkor azoknak a pontoknak a halmaza, amelyeknek a két gömbre vonatkozó hatványa egyenlő, egy sík; ezt a síkot hívjuk $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ hatványsíkjának.

Azt, hogy két kör hatványvonala egyenes, az iskolában koordinátákkal vagy vektorokkal szoktuk levezetni; felírjuk az (x, y) pont hatványait a két körre, és vesszük a kettő különbségét. A különbség egy kétváltozós lineáris függvény, tehát egy egyenes egyenlete.

Miért egyenes a hatványvonal?

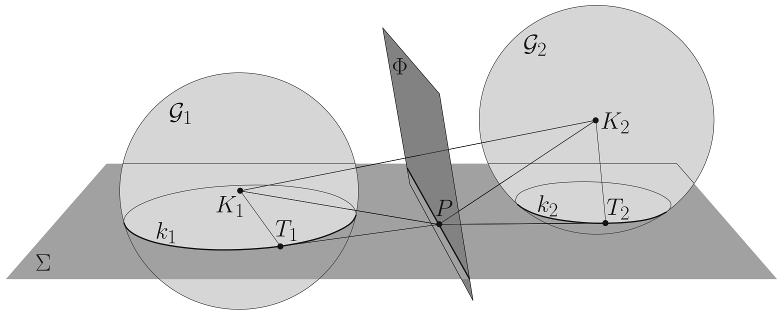
Az iskolai levezetésből tudjuk, hogy a hatványvonal egyenes, csak az nem teljesen világos, hogy *miért.* Lássunk egy másik bizonyítást, amelyből közvetlenül derül ki, hogy a kérdéses pontok tényleg egy egyenesen vannak.

Vegyük fel a k_1 és k_2 köröket a Σ síkban, és nevezzünk egy $P \in \Sigma$ pontot *érdekesnek,* ha a P-ből k_1-hez és k_2-höz húzott érintő szakaszok egyenlő hosszúak. (A definícióból sajnos kimaradnak a körökön belüli pontok; a bizonyításunk csak a kívül elhelyezkedő pontokra fog működni.) Konstruálunk egy egyenest, ami átmegy az összes érdekes ponton.

Illesszünk a két körvonalra egy-egy gömbfelületet, amelyek sugara ugyanakkora; a gömbök legyenek $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$, középpontjuk K_1, illetve K_2. A gömböket úgy válasszuk, hogy K_1 és K_2 a Σ síknak ugyanazon az oldalán legyenek.

Tekintsünk tetszőlegesen egy érdekes P pontot a Σ síkban, és húzzunk P-ből egy-egy érintőt a két körhöz; a két érintési pont legyen T_1, illetve T_2. A PT_1 és PT_2 egyenesek nem csak a két kört, hanem a két gömböt is érintik (*3. ábra*).

[1] centrális: a középpontokat összekötő egyenes



3. ábra

A PK_1T_1 háromszög egybevágó a PK_2T_2 háromszöggel, mert $K_1T_1 = K_2T_2$ a két gömb közös sugara, $PT_1 = PT_2$ az érdekes P pontból a körökhöz húzott érintő szakaszok, és $PT_1K_1\sphericalangle = PT_2K_2\sphericalangle = 90°$, mert a gömböt érintő szakaszok merőlegesek az érintési pontból húzott sugarakra. Ezért a háromszögek átfogói is egyenlők, $PK_1 = PK_2$; ez viszont azt jelenti, hogy a P pont a K_1K_2 szakasz felező merőleges síkjában van.

Jelöljük a K_1K_2 szakasz felező merőleges síkját Φ-vel. A K_1 és K_2 pont választása miatt Σ nem lehet azonos Φ-vel, például mert Φ felezi, míg Σ nem is metszi a K_1K_2 szakaszt.

Az érdekes pontok nem csak a Σ-nak, hanem a Φ síknak is pontjai. Ez a két sík különböző, tehát a közös részük vagy üres, vagy egy egyenes. Az érdekes pontok tehát, ha egyáltalán léteznek, a két sík metszésvonalán vannak.

Érdemes meggondolni, hogy a két sík mikor lehetne párhuzamos. A Φ sík merőleges a K_1K_2 szakaszra, ezért a két sík párhuzamosságának feltétele, hogy a K_1K_2 szakasz is merőleges legyen Σ-ra. Ebben az esetben a két középpont, K_1 és K_2 vetülete Σ-n egybeesne, vagyis k_1 és k_2 koncentrikus[2] lenne.

Hatványvonalak nemeuklideszi geometriákban

Az előbbi bizonyítást többféle irányban is lehetséges kiterjeszteni, általánosítani. Az első, kézenfekvő irány a dimenzió növelése. Térben, két gömb hatványsíkja mindig sík, és ezt úgy igazolhatjuk, hogy a gömbfelületekre azonos sugarú, 4-dimenziós gömböket illesztünk. Ezt ugyan nem tudjuk elképzelni és lerajzolni, de minden más lépés gond nélkül működik.

Van egy másik irány, ami talán nem annyira nyilvánvaló. A bizonyításunkban csak háromszögek egybevágóságát és szimmetriát (szakaszfelező merőleges síkot) használtunk; nem volt szükségünk párhuzamosságra és hasonlóságra. Ezért a bizonyítás olyan geometriai struktúrákban is elmondható, ahol nincs párhuzamosság és hasonlóság.

A *gömbi geometriában,* az eddigi sík helyett, a pontok egy egységsugarú gömbfelület pontjai, az egyenesek helyét a gömb főkörei veszik át. Két pont távolsága a pontokat összekötő (rövidebb) főkörív hossza. A gömbfelületen is bármelyik két körvonalhoz definiálhatjuk az „érdekes" pontokat.

Ugyanaz az okoskodás a gömbön is működik, persze a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ gömböket egy 1-gyel magasabb dimenziójú gömbi geometriában kell elhelyeznünk; a bizonyítás végén azok a pontok, amelyek egyenlő távol vannak a K_1 és K_2 pontoktól, egy 2-dimenziós gömbfelületen vannak, és a két gömbfelület metszete egy főkör. Megint csak a személyes korlátainkkal kell megküzdenünk, amikor az elrendezést megpróbáljuk elképzelni vagy lerajzolni.

A *hiperbolikus geometriák* létezését egymástól függetlenül Bolyai János[3] és Nyikolaj Lobacsevszkij[4] bizonyította be, ők publikáltak először olyan geometriai rendszereket, amelyekben a szokásos euklideszi axiómák teljesülnek, kivéve a párhuzamossági axiómát, ami helyett az igaz, hogy bármely egyeneshez bármely rajta kívül fekvő pontból végtelen sok párhuzamost lehet húzni. (A nemeuklideszi geometriák kutatásában Gaussnak[5] is voltak publikálatlan eredményei.)

A Pitagorasz- és a szelőtételnek is léteznek megfelelői a gömbi és hiperbolikus geometriákban, ezért pont körre vagy gömbre vonatkozó hatványát is lehet képletekkel definiálni. Sajnos a Pitagorasz- és a szelőtételek nemeuklideszi alakja kicsit különbözik, és különböző hatványfogalmakat tennének logikussá.

Az alábbi táblázatban összegyűjtöttem a Pitagorasz-tétel, pont körre vonatkozó hatványa és a szelőtétel gömbön és a hiperbolikus geometriákban érvényes megfelelőit. A k rögzített pozitív szám a hiperbolikus geometria *paramétere* (egyfajta skálázás), r a kör sugara, d a pontnak a középponttól való távolsága, x_1, x_2 és t két egyirányú szelődarab, illetve a körhöz húzott érintő szakasz hossza. A ch és th a hiperbolikus koszinusz-, illetve tangensfüggvény: $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

---

[2]koncentrikus: a középpontjaik egybeesnek

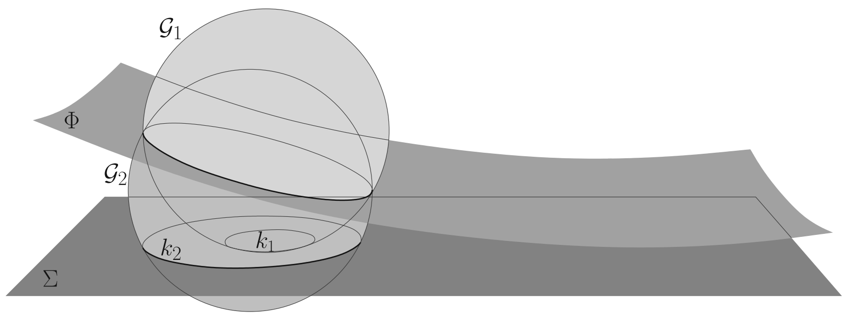
[3]Bolyai János magyar matematikus, 1802–1860

[4]Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij orosz matematikus, 1792–1856

[5]Carl Friedrich Gauss német matematikus, 1777–1855

	Pitagorasz-tétel	Hatvány def.	szelőtétel (alternatív def.)
euklideszi	$t^2+r^2=d^2$	d^2-r^2	$x_1\cdot x_2=(d+r)(d-r)$
gömbi	$\cos t\cos r=\cos d$	$\dfrac{\cos d}{\cos r}$	$\tan\dfrac{x_1}{2}\cdot\tan\dfrac{x_2}{2}=\tan\dfrac{d+r}{2}\tan\dfrac{d-r}{2}$
hip.	$\operatorname{ch}\dfrac{t}{k}\operatorname{ch}\dfrac{r}{k}=\operatorname{ch}\dfrac{d}{k}$	$\dfrac{\operatorname{ch}\frac{d}{k}}{\operatorname{ch}\frac{r}{k}}$	$\operatorname{th}\dfrac{x_1}{2k}\cdot\operatorname{th}\dfrac{x_2}{2k}=\operatorname{th}\dfrac{d+r}{2k}\operatorname{th}\dfrac{d-r}{2k}$

Ezekből a képletekből le lehet vezetni, hogy a hatványvonal egyenes, illetve főkör, de az előbb látott térbe kilépés is működik: ugyanúgy definiálhatjuk az érdekes pontokat, és elismételhetjük a bizonyítást. A hiperbolikus eset végén egyetlen furcsa közjáték történhet: a Σ és a Φ síkok úgy is lehetnek párhuzamosak, hogy a k_1 és k_2 körök középpontja különböző; a hatványvonal ilyenkor nem jön létre (*4. ábra*).



4. ábra

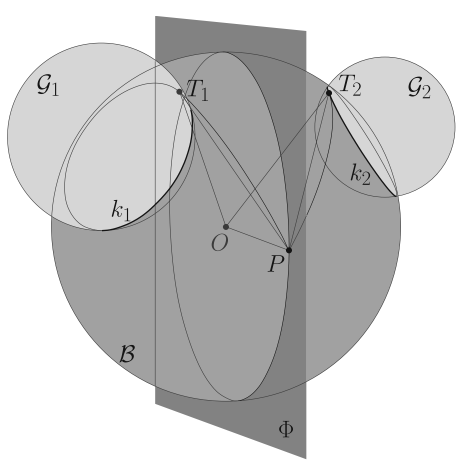
Alternatív bizonyítás a gömbön: a békaszem-módszer

A gömbi esetben a nehézségeinket az okozta, hogy plusz egy dimenziót már felhasználtunk a gömbfelület elhelyezéséhez, és a háromdimenziós gömbi geometriát már csak a négydimenziós euklideszi térbe tudnánk beágyazni. Most mutatok egy olyan bizonyítást, amikor a kétdimenziós gömbfelületből a háromdimenziós euklideszi térbe lépünk ki, így nem lesz szükségünk még egy dimenzióra. Az euklideszi tételeink közül fel fogjuk használni, hogy két különböző középpontú gömb hatványsíkja egy síkfelület.

Legyen $\mathcal{B}$ egy O középpontú gömbfelület, és rajta k_1 és k_2 két különböző, főkörnél kisebb körvonal. Nevezzük $\mathcal{B}$ egy P pontját érdekesnek, ha P-ből a két körvonalhoz egyenlő hosszúságú érintő főköríveket lehet húzni. Azt szeretnénk igazolni, hogy az érdekes pontok a $\mathcal{B}$ gömb valamelyik főkörén vannak.

Legyen $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ az a két gömb, amely k_1, illetve k_2 mentén merőlegesen metszi $\mathcal{B}$-t. (A $\mathcal{B}$ gömb a béka teste, $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ a két szemgolyója.)

Tekintsünk egy tetszőleges érdekes P pontot a $\mathcal{B}$ felületen, és legyen T_1 és T_2 egy-egy olyan pont a két körvonalon, amelyre a PT_1 és PT_2 főkörívek érintik k_1-t, illetve k_2-t (*5. ábra*).



5. ábra

A $\mathcal{G}_1$ gömb merőlegesen metszi $\mathcal{B}$-t, ezért $\mathcal{G}_1$-et érinti a $\mathcal{B}$ gömb OT_1 sugara; ezen kívül a PT_1 főkör is érinti. Ezért $\mathcal{G}_1$-et érinti az OPT_1 sík és vele együtt a PT_1 szakasz is. Hasonlóan láthatjuk, hogy a PT_2 szakasz érinti a $\mathcal{G}_2$ gömböt.

A feltevésünk szerint P egy érdekes pont, vagyis a PT_1 és PT_2 ívek egyforma hosszúak; ebből következik, hogy a PT_1 és PT_2 szakaszok is egyforma hosszúak. Tehát a P pontból egyforma hosszú érintőt lehet húzni a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ gömbökhöz. Ezért a P pont benne van a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ gömbök hatványsíkjában. Jelöljük ezt a síkot Φ-vel.

Vegyük észre, hogy az O pontból a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ gömbökhöz húzott OT_1 és OT_2 érintők is egyforma hosszúak, mert a $\mathcal{B}$ sugarai. Tehát O is a Φ síkban van. Az összes érdekes pont a $\mathcal{B}$ gömbfelület és a középpontján átmenő Φ sík közös részében van, ami egy főkör.

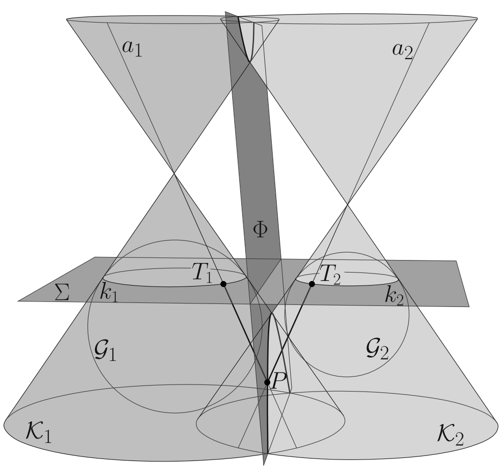
Azonos meredekségű kúpok metszete

Gömbök hatványsíkjainak egy alkalmazása a következő, jól ismert tétel.

Tétel. *Ha két egyenes körkúppalást tengelye párhuzamos, és a nyílásszögük ugyanakkora, akkor a két kúp közös pontjai egy síkban vannak.*

(Ezt a tételt is könnyű lenne koordinátákkal bizonyítani, lásd a 3. feladatot).

Jelöljük két kúpot $\mathcal{K}_1$-gyel és $\mathcal{K}_2$-vel, és metsszük el a kúpokat egy, a tengelyekre merőleges Σ síkkal; a két metszetkör legyen k_1 és k_2. Legyen $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ az a két gömb, amely k_1, illetve k_2 mentén érinti a két kúppalástot (*6. ábra*).



6. ábra

Tekintsük a két kúpnak egy közös P pontját. Ezen átmegy a kúpoknak egy-egy alkotója; legyenek ezek a_1 és a_2. A k_1 kör és az a_1 egyenes metszéspontja legyen T_1, a k_2 és a_2 metszéspontja T_2. Az alkotók érintik a beírt gömböket, tehát PT_1 a T_1 pontban érinti $\mathcal{G}_1$-et, és PT_2 a T_2 pontban érinti $\mathcal{G}_2$-t.

Mivel a két kúp nyílásszöge ugyanakkora, a PT_1 és PT_2 szakaszok ugyanakkora szöget zárnak be a Σ síkkal. Ezért $PT_1 = PT_2$. A P pontból tehát ugyanolyan hosszú érintőt lehet húzni a két gömbhöz, így P a két gömb Φ hatványsíkjában van.

Ezzel bebizonyítottuk, hogy $\mathcal{K}_1$ és $\mathcal{K}_2$ közös pontjai mind a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ gömbök hatványsíkjában vannak.

Vegyük észre, hogy nem is használtuk a kúpok csúcsait; a bizonyítás változtatás nélkül működik egyköpenyű forgáshiperboloidokra[6], ha a tengelyeik párhuzamosak, és az alkotóik ugyanakkora szöget zárnak be a tengelyekkel.

Ezt az állítást és a bizonyítást is át lehet vinni nemeuklideszi geometriákba. A párhuzamos tengelyek helyett azt kötjük ki, hogy van egy olyan Σ sík, amely merőlegesen elmetszi mindkét kúp tengelyét, az egyenlő nyílásszög helyett azt írjuk elő, hogy a két kúp alkotói ugyanakkora szögben döfjék Σ-t.

A gömbi változatban ismét csak a képzeletünk határaiba ütközünk: Hogy képzeljünk el egy gömbi kúppalástot? A hiperbolikus esetben az okozhat nehézséget, hogy a $\mathcal{G}_1$ és $\mathcal{G}_2$ gömbök nem mindig léteznek. Ezen úgy segíthetünk, ha a gömbök helyett más, állandó görbületű, de nem összezáródó felületeket, úgynevezett *horoszférákat* és *hiperszférákat* is használunk. A hiperbolikus változat továbbgondolásához további tanulásra is szükségünk van.

Ajánlott irodalom

[1] Gömbi trigonometriáról Obádovics Gyula: Matematika c. klasszikus zsebkönyvét (5.3.12–5.15. részek) ajánlom.

[2] Reiman István: A geometria és határterületei c. könyve utolsó fejezetében szerepel a hiberbolikus geometria egy, a Beltrami–Cayley–Klein-féle modellre épülő felépítése.

[6] forgásfelület, amit úgy kaphatunk, hogy egy egyenest (a hiperboloid alkotóját) körbeforgatunk egy tőle kitérő tengely körül

[3] H. S. M. Coxeter: A geometriák alapjai c. könyvében a 16. fejezet szól a hiperbolikus geometriákról. Itt egy rövid rész szerepel horo- és hiperciklusokról és a horoszféra geometriájáról.

Feladatok

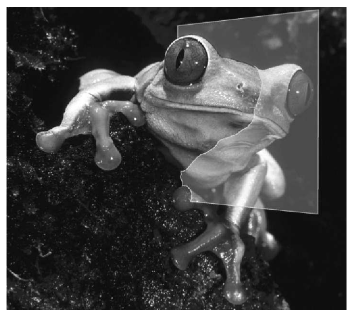
1. Módosítsuk a békaszem-módszert; vizsgáljuk a szemgolyók helyett a két körvonal síkjait.

2. Módosítsuk a békaszem-módszert úgy, hogy a szemgolyók a körökre illeszkedő, az O ponton átmenő gömbök legyenek.

3. Legyenek $\mathcal{H}_1$ és $\mathcal{H}_2$ egymástól különböző körkúp vagy egyköpenyű forgáshiperboloid-felületek a térbeli derékszögű koordinátarendszerben úgy, a tengelyük párhuzamos a z-tengellyel, és a két felület alkotói ugyanakkora szögben döfik az xy koordinátasíkot. Igazoljuk, hogy két felület egyenletének különbsége lineáris függvény.

4. Bizonyítsuk be a gömbi szelőtételt.

Sose feledjük:



Ha békával találkozunk, vizsgáljuk meg a szemgolyói hatványsíkját!