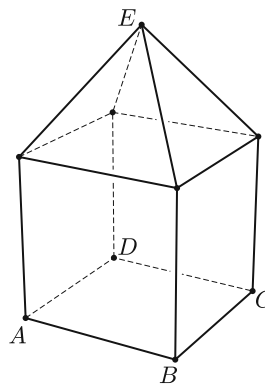
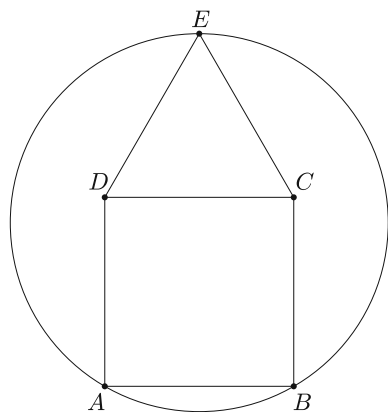


I. rész

1. a) A bal oldali ábrán egy 1 cm oldalhosszú négyzet és rajta egy 1 cm oldalhosszú szabályos háromszög látható. Mekkora annak a körnek a sugara, amely átmege az A , B , E pontokon?

(5 pont)



b) A jobb oldali ábrán egy 1 cm élhosszú kocka és rajta egy olyan 1 cm élhosszú szabályos gúla látható, amelynek minden oldallapja szabályos háromszög. Mekkora annak a gömbnek a sugara, amely átmege az A , B , C , D , E pontokon?

(7 pont)

2. Egy 2019 mezőből álló játéktáblánk van a következő ábra szerint:

1	2	3	4	5	1	2	...
---	---	---	---	---	---	---	-----

(Az 1, 2, 3, 4, 5 számok vannak rajta ciklikusan, összesen 2019 hosszán.) Az 1-es mezőről indulunk, és minden mezőről annyit lépünk jobbra, amennyi az ott lévő szám.

a) Összesen hányra lépünk rá a mezők közül?

(4 pont)

b) Mennyi azon mezők számainak összege, amire nem lépünk rá?

(3 pont)

c) A játékszabályokat a következőképpen módosítjuk: egy szabályos hatoldalú kockával dobunk, ha a dobás eredménye az 1 és 5 közötti d szám, akkor az első mező, amire rálépünk az első d ; míg ha a dobás hatos, akkor az első 1-esre lépünk, és innentől kezdve minden mezőről annyit lépünk jobbra, amennyi az ott lévő szám. Az első száz mező közül várhatóan hány mezőt látogatunk meg?

(4 pont)

3. Pizkos Fred a kapitány hosszú tengeri útra indul hajójával. Egy 100 literes hordóban tiszta alkoholt víz magával. Fred a hordóból minden éjfélok megiszik 5 liter lötytyöt, majd felmegy a hídra és a hajó kormánykereket elteteri 30° -kal. Ezek után visszavonul a kabinjába és a következő éjfélig alszik. A matrózok minden nappal során feltöltik a hordót esővízzel, de a kormánykerékhez nem nyúlnak. Ha a hordó alkoholtartalma 50% alá csökken és a kapitány iszik belőle, akkor kijózanodik.

a) Az indulás után hanyadik éjfélok józanodik ki Fred?

(4 pont)

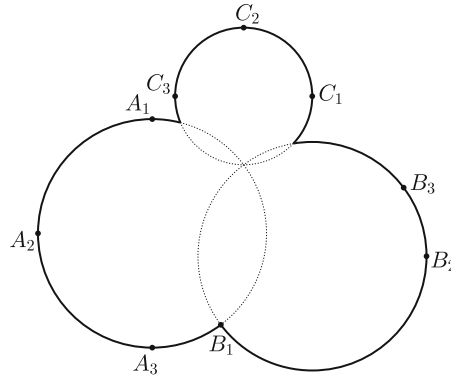
Fred fogadott egy hordó rumba Watson kapitánnyal, hogy az ő hajója gyorsabb, mint Watson fregattja. A verseny április elsején 23 óra 59-kor indult. A két hajó egyszerre indult el a nyugati irányban pontosan 10 000 kilométerre lévő közös célpont, a Rejtő-fok felé. Watson hajója állandó 8 csomó sebességgel haladt, míg Fred teknője 6 csomóval. (1 csomó sebesség megegyezik $1,85 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ -val.) Fred amíg részeg, minden páros sorszámú nap éjfélen balra tekeri 30° -kal a kormánykereket, míg a páratlan sorszámú napokon jobbra; amikor viszont kijózanodik, akkor azonnal a megfelelő irányba állítja a kormánykereket (és a helyes irányt a továbbiakban tartja is). A józan Pizkos Fred továbbá minden éjfélok képes a hajó aktuális sebességét 10%-kal növelni (és ezt az egész következő nap tartani).

b) Melyik kapitány nyeri a fogadást?

(9 pont)

4.

Az *ábra* egy park térképét ábrázolja. A parkot három körvonal határolja; a körök rendre az $A_1(-2; 3)$, $A_2(-7; -2)$, $A_3(-2; -7)$, illetve a $B_1(1; -6)$, $B_2(10; -3)$, $B_3(9; 0)$, valamint a $C_1(5; 4)$, $C_2(2; 7)$, $C_3(-1; 4)$ pontok által meghatározott körök köréírt körei.



a) Igazoljuk, hogy az $A_1A_2A_3$, a $B_1B_2B_3$, valamint a $C_1C_2C_3$ háromszögek mind derékszögű háromszögek.

(4 pont)

b) Igazoljuk, hogy az A_3, B_1, B_2 , valamint a B_3, C_1, C_2 , illetve a C_3, A_1, A_2 ponthármasok rendre egy-egy egyenesre esnek.

(3 pont)

c) A park építésze egy „különleges” helyre kutat szeretne fúrtni. Úgy tűnik neki, hogy a parkot alkotó három kör egy közös pontban metszi egymást (ami eléggé különleges lenne). Igaza van-e az építésznek? Ha igen, pontosan hol van ez a pont?

(8 pont)

II. rész

5. a) Adjuk meg a $h(x) = \cos 2x - \sin 2x + 2 \sin^2 x + 1$ függvény szélsőértékeit. Hol veszi fel a szélsőértékeit a függvény?

(6 pont)

b) Legyen $f(x) = x^2 - 2x + 2$, míg a $g_n(x)$ a következőképpen definiált függvény-sorozat:

$$g_1(x) = f(x); \quad g_n(x) = f(g_{n-1}(x)) \quad (\text{ha } n \geq 2).$$

Adjuk meg $g_{2019}\left(\frac{3}{2}\right)$ tizedesvessző utáni első 100 számjegyét.

(10 pont)

6. Néhány vegyianyag-szállító kamionban különféle kóddal (A, B, C, D, E, F, G, H) ellátott palackokat szállítanak. A robbanásveszély miatt bizonyos palackokat nem szabad együtt szállítani. Ezeket a „tiltásokat” a következő táblázat tartalmazza:

Vegyi anyag címkéje:	A	B	C	D
Ezzel nem szállítható:	B, E, F	A, C, G	B, E, H	F, G
Vegyi anyag címkéje:	E	F	G	H
Ezzel nem szállítható:	A, C, F, H	A, D, E, G, H	B, D, F, H	C, E, F, G

a) Legalább hány kamion kell, ha minden anyagból pontosan egy-egy palackot kell elszállítanunk? (Minden kamionba legfeljebb négy palack fér el.)

(6 pont)

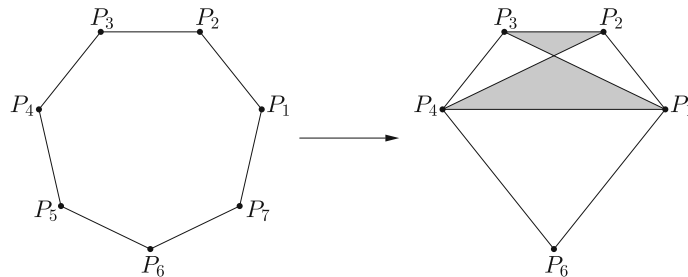
b) Hány kamion kell, ha minden anyagból pontosan 5-5 palackot kell elszállítani? (Most is minden kamionba legfeljebb négy palack fér el.)

(6 pont)

c) Véletlenszerűen kiválasztva két különböző palackot mennyi az esélye annak, hogy azokat nem tehetjük egy kamionra?

(4 pont)

7. Egy cég gyémánt alakú emblémája olyan ötszög, melynek csúcsai egy szabályos hétszög megfelelő $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_6)$ csúcsai (lásd *jobb oldali ábra*).



A cég 10 000 darab az emblémával ellátott kitűzőt rendelt. A nyomdai költségekben két tétellel kell kalkulálni: 10 000 centiméternyi vonal megrajzolása 50 euróba kerül, míg 10 000 cm²-nyi terület besatírozása 200 euróba.

a) Mennyi lesz a 10000 kitűző nyomdai költsége, ha a szabályos hétszög egy-egy oldala 2 cm hosszú?

(10 pont)

b) A cég piárosa úgy találta, hogy az embléma nem elég színes. Szeretné a gyémánt 5 összefüggő részében megjeleníteni a piros, a fehér és a zöld színeket. Hányféle különböző ilyen három színű emblémát kaphatunk, ha azt szeretnénk, hogy az élben szomszédos részek színe különböző legyen, valamint mind a három szín meg is jelenjen az emblémában?

(6 pont)

8. Egy speciális trópusi halaknak való felül nyitott, alul és oldalt üveg akváriumot építünk. Az akvárium paramétereire EU-előírások alapján a következőknek kell teljesülnie:

- Az akvárium térfogata 1 m³ kell, hogy legyen;
- az akvárium alapja olyan téglalap, melynél az oldalak aránya 1 : 2;
- a négy oldalfal olyan üvegből készül, melynek ára 90 euró négyzetméterenként;
- az akvárium alsó lapja pedig olyan üvegből készül, melynek négyzetmétere 120 euróba kerül.

Milyennek válasszuk az akvárium éleit, hogy a lehető legkevesebb legyen az anyagköltség, és az hány euró lesz?

(16 pont)

9. Hány olyan $0 < \frac{a}{b} < 1$ és $0 < \frac{c}{d} < 1$ ($a, b, c, d \in \mathbb{N}^+$) nem egyszerűsíthető közösleges tört van, hogy az

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{c}{d}\right)$$

szorzat egész, valamint $a + b + c + d = 100$?

(16 pont)