Vetítés és inverzió

Ebben a cikksorozatban olyan bizonyításokat mutatunk be, amikor a geometriai alakzatokat „térbe kilépve”, három- vagy akár még magasabb dimenziós objektumok vetületeként vagy metszeteként állítjuk elő.

A második részben olyan példákat veszünk sorra, amikor egy síkbeli alakzatot egy másik síkra vagy egy gömbfelületre vetítünk egy pontból. Az alakzataink pontokból, egyenesekből és körvonalakból fognak állni. Az új helyzetben az ábrának további szimmetriái lesznek, és szimmetriából fog következni a bizonyítandó állítás.

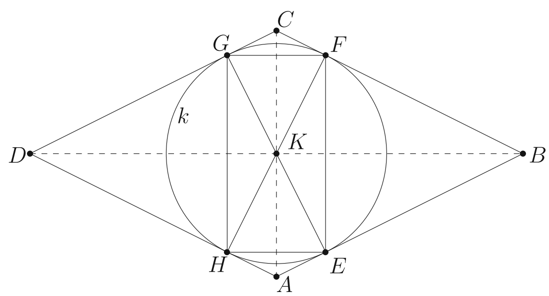
Többször is használni fogunk egy fontos geometriai transzformációt, az *inverziót.* Az inverzió legfontosabb tulajdonságait a Függelékben foglaltam össze.

Körvonal vetítése körvonalra

A módszert először a következő, a cikk előző részéből is ismert tételen mutatom be.

1. példa. *Ha az $ABCD$ érintőnégyszög beírt köre az AB, BC, CD, DA oldalakat rendre az E, F, G, illetve H pontban érinti, akkor az AC, BD, EG és FH szakaszok egy ponton mennek át.*

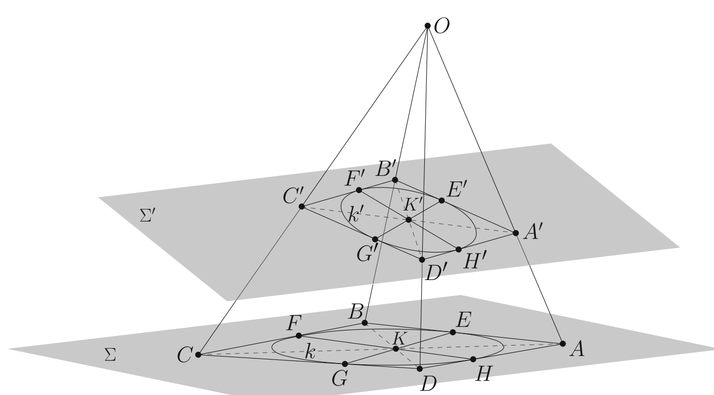
A tételt az eddigi eszközeinkkel is sokféleképpen be lehet bizonyítani (lásd az 1.a–1.c feladatokat), de most következzen inkább egy újabb térbe kilépés. Jelöljük k-val a beírt kört, és legyen K az EG és FH húrok metszéspontja. Ha akkora szerencsénk van, hogy K éppen a k középpontja, akkor rengeteg szimmetriát láthatunk az ábrában (*1. ábra*).



1. ábra

Az $EFGH$ négyszögben az EG és FH átlók a kör átmérői, a K középpontban felezik egymást és egyenlő hosszúak, tehát a négyszög egy téglalap. A téglalap egyik szimmetriatengelye az EF és a GH oldalak közös felezőmerőlegese. Erre a tengelyre szimmetrikusak a körhöz E-ben és F-ben húzott érintők is; ezek metszéspontja, B tehát rajta van a szimmetriatengelyen. Ugyanígy D is, és persze a téglalap középpontja, K is a tengelyen van. Ugyanezt a másik szimmetriatengelyre is elmondhatjuk, és így látjuk, hogy a K ponton az AC egyenes is átmegy.

Az általános esetben azzal próbálkozunk, hogy az ábra Σ síkját a térben helyezzük el, és valamilyen O pontból egy másik Σ' síkra vetítjük át. Szokás szerint a különböző alakzatok képét vesszővel jelölve, a célunk, hogy a k kör képe, k' az új síkon egy K' középpontú körvonal legyen (*2. ábra*).



2. ábra

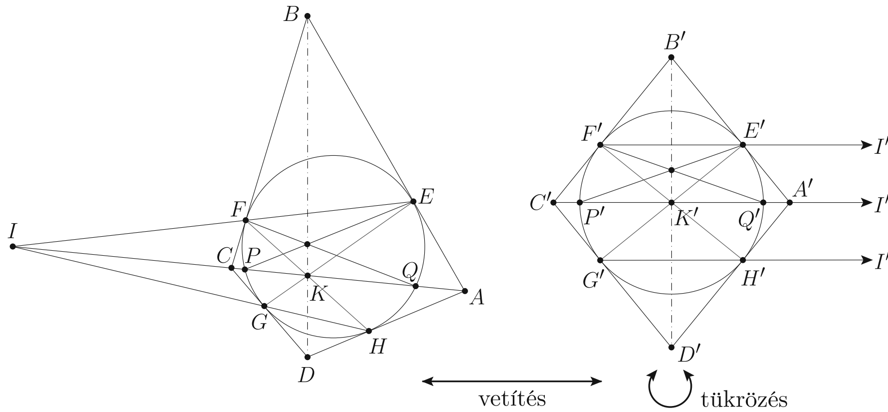
Ha ilyen vetítés létezik, akkor a Σ' síkban az előbbi, szimmetrikus ábrát kapjuk meg újra, és már láttuk, hogy az $A'C'$, $B'D'$, $E'G'$, és $F'H'$ szakaszok mind átmennek a K' ponton. Az O-ból visszavetítve a pontokat az eredeti Σ síkra, a bizonyítandó állítást kapjuk.

A bizonyításhoz szükséges vetítés mindig létezik, de ez nem magától értetődő; rövidesen mutatok rá egy lehetséges konstrukciót.

Ugyanennek az ötletnek egy másik alkalmazása a következő, néhány évvel ezelőtti KöMaL-feladat.

2. példa. *Az $ABCD$ konvex érintőnégyszögbe írt kör az AB és BC oldalakat az E, illetve a F pontban érinti. Az AC átló a beírt kört a P és a Q pontban metszi; a Q pont az A és a P pontok között helyezkedik el. Mutassuk meg, hogy a BD, EP és FQ egyenesek egy ponton mennek át.* (KöMaL **A. 594.**, 2013. szeptember)

Megoldás. Az 1. példához hasonlóan definiáljuk a G, H és K pontokat, majd az egész ábrát úgy vetítsük egy új síkra, hogy a beírt kör képe körvonal legyen, és a középpontja a K' pont. A vetítés után az ábra szimmetrikus a $B'D'$ egyenesre; speciálisan az $E'P'$ és $F'Q'$ szakaszok egymás tükörképei, ezért a tükrözés tengelyét, a $B'D'$ egyenest ugyanabban a pontban metszik (*3. ábra*).



3. ábra

Az ábrán még egy érdekes pontot megjelöltem: az I pont az EF és GH egyenesek metszéspontja. A vetítés után ezek képei, az $E'F'$ és $G'H'$ párhuzamosak az $A'C'$ egyenessel, és könnyű meggondolni, hogy a vetítéshez használt OI egyenes is párhuzamos velük. Ezért az I' pont nem jön létre, vagy pedig úgy is mondhatjuk, hogy – a Σ' síkot projektív értelemben kiterjesztve – I' ezeknek az egyeneseknek a közös végtelen távoli, *ideális* pontja.

Érdemes a megoldáshoz felhasznált három transzformáció egymás utánját is megvizsgálni: először a szimmetrikus helyzetbe vetítünk, utána tükrözünk a $B'D'$ egyenesre, végül visszavetítjük a pontokat és egyeneseket az eredeti síkra. Ez a transzformáció felcseréli az A–C, E–F, G–H, P–Q pontpárokat, és fixen hagyja a BD egyenes pontjait. Az EF és GH egyenesek önmaguk képei, ezért a metszéspontjuk, az I pont is fix.

A szorzat transzformációnk a projektív síknak egyfajta tükrözése. Egyenestartó, vagyis egyenesek képe egyenes, van egy tengelye, amelynek minden pontját önmagára képezi, és a tengelyen kívül még egy fixpontja. A sík többi pontjait párosával egymásnak felelteti meg.

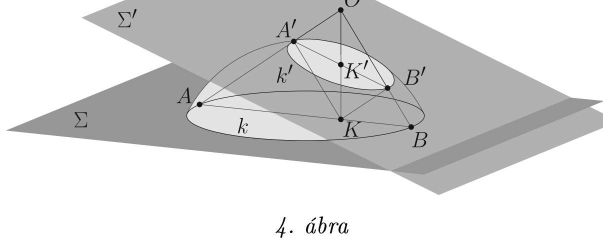
A projektív transzformációkról, ezek osztályozásáról (és főleg a latin neveikről) sokkal többet lehetne írni, de ez most nem cél.

Körvonal vetítése körvonalra térbeli inverzióval

Még adósok vagyunk annak igazolásával, hogy egy körvonalat és egy belső pontját egy másik körvonalba és annak középpontjába lehet vetíteni.

1. lemma. *Legyen k körvonal a Σ síkban, és K a kör egy belső pontja. Ekkor létezik a térben olyan Σ' sík és olyan, a két síkra nem illeszkedő O pont, hogy O-ból vetítve a k kör vetülete a Σ' síkon szintén körvonal, és ennek a körvonalnak a középpontja K vetülete.*

Bizonyítás. Húzzuk meg a k körnek a K ponton átmenő egyik átmérőjét, legyen ez AB. A Σ síkra állítsunk merőleges egyenest a K pontban, és válasszuk ezen az egyik olyan O pontot, amelyre $AOB\sphericalangle$ derékszög. A K pont merőleges vetülete az OA és OB szakaszokon legyen A', illetve B'. Ezek a pontok mind az ABO háromszög síkjában vannak. Az $OA'KB'$ négyszög téglalap, mert az O, A' és B' csúcsainál is derékszöge van. Legyen K' a téglalap középpontja; ekkor tehát az OK és $A'B'$ szakaszok a K' pontban felezik egymást (*4. ábra*).



4. ábra

Tekintsük most az O középpontú, K-n átmenő gömbre való inverziót; ez a k körvonalat egy k' körvonalba képezi. Ennek az új körnek a síkja legyen Σ'.

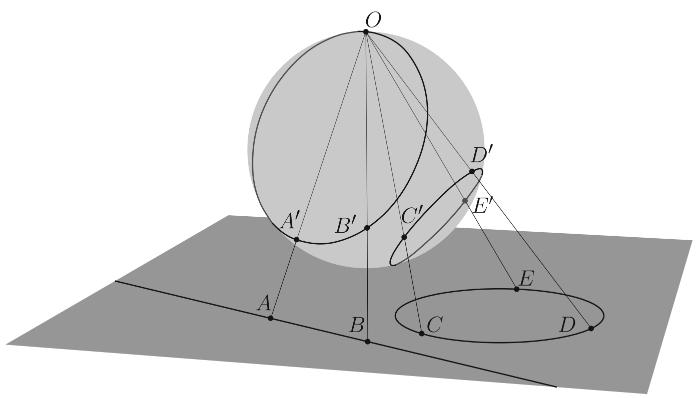
Az OAK és OBK derékszögű háromszögekben A', illetve B' a derékszögű csúcsnak az átfogóra eső vetülete; a befogótétel miatt $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OK^2$, tehát az A pont inverzió szerinti képe A', a B pont képe B'. A k' kör tehát átmegy az A' és a B' ponton. A k kör merőleges az ABO síkra, ezért a k' is merőleges rá, tehát a k' körnek az $A'B'$ szakasz átmérője, és így a K' pont a k' középpontja. Az O pontból vetítve a Σ' síkra, a k kör vetülete a k' kör, a K pont vetülete pedig k' középpontja, K'.

Megjegyzés. Nem az imént megszerkesztett O pont (és Σ-ra való tükörképe) az egyetlen, amely eleget tesz az 1. lemma feltételeinek. Végtelen sok lehetséges vetítési középpont létezik, ezzel kapcsolatban lásd a 485. oldalon a **B. 5060.** feladatot.

Körök vetítése gömbfelületre

A továbbiakban két olyan példa következik, amelyekben egyeneseket és körvonalakat vetítünk a síkból egy gömbfelületre.

Ha a síkot invertáljuk egy külső pontból, a sík képe egy gömbfelület, egyedül az inverzió pólusa nem áll elő képként. Ezt a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést sztereografikus projekciónak is hívjuk. A síkbeli egyeneseknek és köröknek a gömbfelületen körvonalak felelnek meg; az egyenesek megfelelői azok a körvonalak, amelyek átmennek az inverzió pólusán. (*5. ábra*)



5. ábra

A projektív síkhoz hasonlóan, a síkot kiegészíthetjük egyetlen ideális ponttal, ami az inverzió pólusának felel meg. A sík minden egyenese átmegy ezen az ideális ponton. Az így kapott rendszert hívjuk *inverzív síknak.*

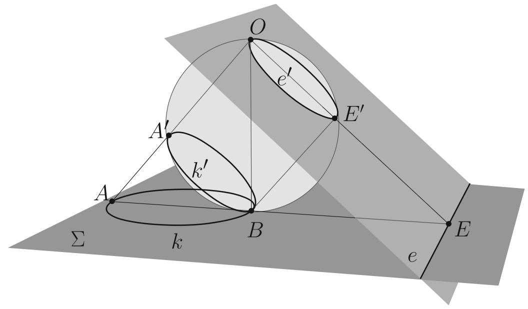
A példáinkban két, közös pont nélküli körvonalat vagy egy kört és egy egyenest fogunk a gömb két párhuzamos körvonalára vetíteni. A következő lemma szerint ez mindig lehetséges.

2. lemma. *a) Ha k egy körvonal és e egy egyenes a Σ síkban, és nincs közös pontjuk, akkor ezekhez létezik a síkon kívül olyan O pont, hogy O-ból invertálva, a k és e képei párhuzamos síkokban fekszenek.*

b) Ha k_1 és k_2 két, közös pont nélküli körvonal a Σ síkban, akkor ezekhez létezik a síkon kívül olyan O pont, hogy O-ból invertálva, a k_1 és k_2 képei párhuzamos síkokban fekszenek.

Bizonyítás. Mindkét állításhoz hasonló konstrukciót mutatunk, mint az 1. lemma bizonyításában.

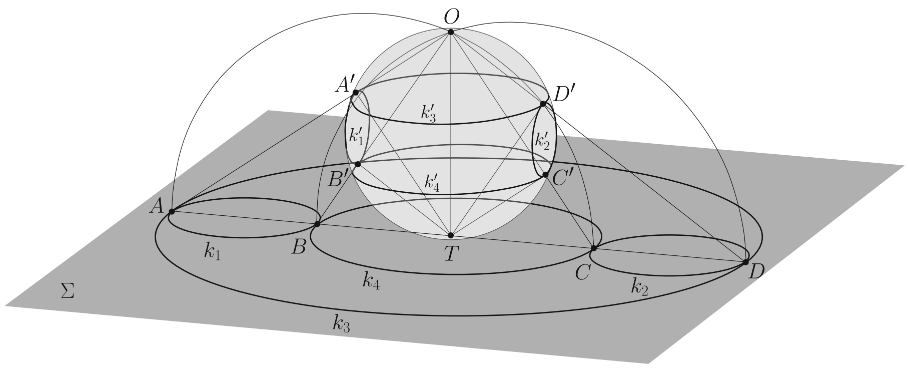
a) Legyen AB a k kör e-re merőleges átmérője, E az e és az AB egyenes metszéspontja. Az A, B pontokat válasszuk olyan sorrendben, hogy B az AE szakasz belsejében helyezkedjen el. Állítsunk B-n keresztül egy Σ-ra merőleges egyenest, és legyen ezen O olyan pont, amelyre $AOE\sphericalangle = 90°$. A B pont merőleges vetülete az OA és OE szakaszokon legyen A', illetve E'. Az $OA'BE'$ négyszög téglalap (*6. ábra*).



6. ábra

Tekintsük most az O középpontú, B-n átmenő gömbre vonatkozó inverziót. Az A, B, E pontok képe rendre A', B', illetve E', a Σ sík képe az OB átmérőjű gömb. A k és e képei az $A'B$, illetve OE' egyeneseken keresztül, az ABO síkra állított merőleges síkokban fekszenek, amelyek párhuzamosak egymással.

b) Ha a két kör egymáson kívül fekszik, akkor messe a két kör centrálisa a két körvonalat az A, B, illetve C, D pontokban, ebben a sorrendben. A Σ síkra merőlegesen vegyük fel az AC és BD félköröket, ezek metszéspontja legyen O. Legyen O merőleges vetülete a síkon T, és legyen T merőleges vetülete az OA, OB, OC, OD szakaszokon rendre A', B', C', illetve D'. Az O középpontú, T-n átmenő gömbre vonatkozó inverzió a Σ síkot az OT átmérőjű gömbre képezi, ezen belül az A, B, C, D pontok képe rendre A', B', C', illetve D'. Mivel $A'OC'\sphericalangle = B'OD'\sphericalangle = 90°$, a gömbnek $A'C'$ és $B'D'$ átmérői; emiatt $A'B'C'D'$ is téglalap. A k_1 és k_2 körök képei az $A'B'$ és $C'D'$ átmérőjű, az ABO síkra merőleges körök, amelyek tehát egyenlő sugarúak, és egymással párhuzamos síkokban vannak (*7. ábra*).

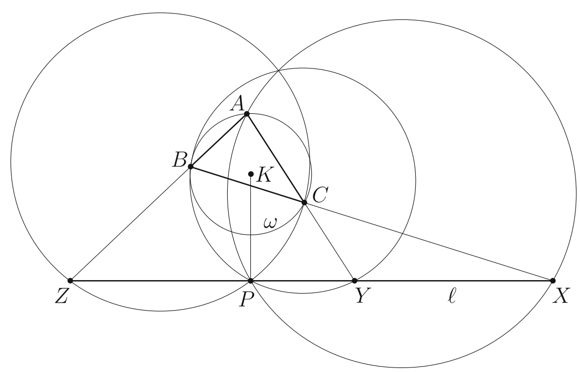


7. ábra

Ha k_1 és k_2 nem egymáson kívül helyezkedik el, akkor az ábrán a k_3 és k_4 körökkel mondhatjuk el ugyanezt.

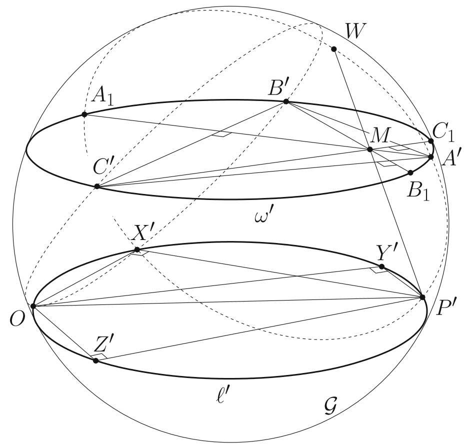
Megjegyzés. Vegyük észre, hogy mindkét esetben az ABO sík merőleges volt a Σ síkra. Az *a*) részben az OE egyenes merőleges e-re. Be lehet bizonyítani, hogy csak ilyen tulajdonságú O pontok teljesíthetik a lemma feltételeit.

3. példa. *Legyen az ABC háromszög körülírt köre ω, és ℓ egy egyenes, amelynek nincs közös pontja ω-val. Jelöljük P-vel ω középpontjának merőleges vetületét ℓ-en. A BC, CA, AB oldalegyenesek ℓ-et rendre a P-től különböző X, Y, illetve Z pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy az AXP, BYP és CZP háromszögek köré írt köröknek vagy van még egy, P-től különböző közös pontja, vagy pedig P-ben érintik egymást* (8. ábra). (IMO Shortlist 2012/G8; Cosmin Pohoata feladata)



8. ábra

Megoldás. Invertáljuk az ábrát a 2. lemma *a*) része szerint egy alkalmas O pontból úgy, hogy az ω kör és az ℓ egyenes képei párhuzamos síkokban fekvő körök legyenek. Az egyes objektumok képét most is vesszővel fogjuk jelölni. Az ábra síkjának képe egy $\mathcal{G}$ gömb; ennek felszínén helyezkedik el az ω' kör, ami átmegy az A', B' és C' pontokon, továbbá az ℓ' kör, amely átmegy az X', Y', Z' és P' pontokon és az inverzió pólusán, az O ponton. A 2. lemma konstrukciójában OP merőleges ℓ-re, ezért az OP' szakasz az ℓ' körnek átmérője. A Thalész-tétel miatt tehát $OX'P'\sphericalangle = OY'P'\sphericalangle = OZ'P'\sphericalangle = 90°$ (*9. ábra*).



9. ábra

Az BCX egyenes inverzió szerinti képe egy O-t átmenő körvonal, ezért a B', C', X', O pontok egy körvonalon vannak. Ennek a körnek a síkja az ω' és ℓ' körök egymással párhuzamos síkjait párhuzamos egyenesekben metszi, vagyis a $B'C'$ szakasz párhuzamos OX'-vel.

Legyen A_1 az ω' kör és az $A'P'X'$ kör második, A'-től különböző metszéspontja. Az $A'P'X'$ sík szintén két párhuzamos egyenesben metszi az ω' és ℓ' körök síkjait, ezért $A'A_1$ párhuzamos $P'X'$-vel. Mivel az OX' és $P'X'$ szakaszok merőlegesek, a velük párhuzamos $B'C'$ és $A'A_1$ szakaszok merőlegesek egymásra. Tehát az $A'B'C'$ háromszögben $A'A_1$ a BC oldalhoz tartozó magasságvonal.

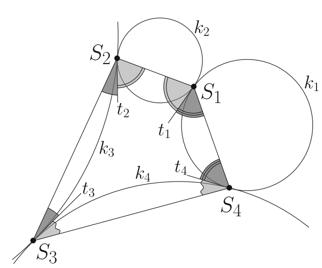
Hasonlóan, legyen B_1 és C_1 a ω' kör második metszéspontja a $B'P'Y'$ és $C'P'Z'$ körökkel; ekkor $B'B_1$ és $C'C_1$ az $A'B'C'$ háromszög másik két magassága.

Legyen ezután M az $A'B'C'$ háromszög magasságpontja, és legyen W a $P'M$ egyenes másik, P'-től különböző metszéspontja a $\mathcal{G}$ gömbbel. Az A', P', X' és W pontok az egymással párhuzamos $A'A_1$ és $P'X'$ szakaszok síkjában, tehát egy körvonalon vannak. Visszainvertálva a síkra azt kapjuk, hogy W képe, W' rajta van az AXP körön. Ugyanígy láthatjuk, hogy a BYP és a CZP kör is átmegy a W' ponton.

Ha a W pont nem jön létre, mert az $P'M$ egyenes érinti a gömböt, akkor az PM' egyenes közös érintője az $A'X'P'$, $B'Y'P'$ és $C'Z'P'$ köröknek, ezért a síkbeli AXP, BYP és CZP körök is érintik egymást a P pontban.

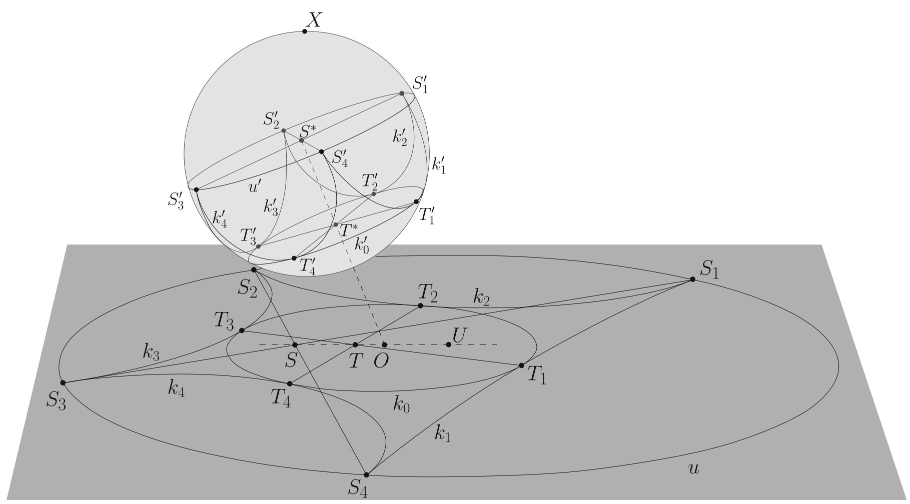
4. példa. *Adottak a síkon a k_0, k_1, k_2, k_3 és k_4 körök úgy, hogy $i = 1, 2, 3, 4$ esetén k_i kívülről érinti k_0-t a T_i pontban, továbbá k_i kívülről érinti k_{i+1}-et az S_i pontban ($k_5 = k_1$). Legyen O a k_0 középpontja, T a T_1T_3 és T_2T_4 egyenesek metszéspontja, és legyen S az S_1S_3 és S_2S_4 egyenesek metszéspontja. Igazoljuk, hogy O, T és S egy egyenesen van.* (KöMaL **A. 597.**, 2013. október; Mester Márton feladata)

Megoldás. Először megmutatjuk, hogy az S_1, S_2, S_3, S_4 pontok egy körön vannak.



10. ábra

Jelöljük t_i-vel a k_1 és k_{i+1} közös belső érintőjét. Az S_iS_{i+1} húrok ugyanakkora szöget zárnak be a t_i és t_{i-1} érintőkkel. Ebből láthatjuk, hogy az $S_1S_2S_3S_4$ négyszög szemközti szögeinek összege egyenlő, $S_1S_2S_3S_4$ húrnégyszög (*10. ábra*). Jelöljük a körülírt körét u-val, u középpontját U-val. Az u kör S_iS_{i+1} íve a k_{i+1} kör belsejében fekszik, így a k_1, k_2, k_3, k_4 körök lefedik u-t, míg ugyanezek a körök kívülről érintik k_0-t. Ezért a k_0 és u köröknek nincs közös pontja. A 2. lemma b) része szerint létezik olyan térbeli inverzió, ami a k_0 és u köröket párhuzamos síkú körökbe viszi. Tekintsünk egy ilyen inverziót; a pólusa legyen X, az egyes objektumok képét most is vesszővel fogjuk jelölni. (*11. ábra*). A sík képe egy gömbfelület, a körök és egyenesek képe egy-egy, a gömbre illeszkedő kör; egymást érintő görbék képei egymást érintő görbék.



11. ábra

Minden egyes i-re a k'_i és u' körök szöge, valamint a k'_{i+1} és u' körök szöge $180°$-ra egészíti ki egymást. Ebből következik, hogy k'_1 és k'_3, illetve k'_2 és k'_4 ugyanakkora, $S'_1S'_2S'_3S'_4$ téglalap, $T'_1T'_2T'_3T'_4$ pedig négyzet.

Legyen $S^* = S'_1S'_3 \cap S'_3S'_4$ és $T^* = T'_1T'_3 \cap T'_3T'_4$ az u', illetve a k'_0 kör középpontja. Mivel X, T_i és T'_i egy egyenesre esik, az X, T_i, T_{i+2}, T'_i, T'_{i+2} pontok egy síkra esnek ($i = 1, 2$). E két sík metszésvonala XT^*T. Hasonlóan, X, S^*, S egy egyenesen van.

Az XS^*T^* síkra a k'_0 és az u' kör is szimmetrikus, ezért az inverzeik is; ezért középpontjaik, O, illetve U a XS^*T^* síkban van.

Az O, U, S, T pontok mindegyike az eredeti sík és az XS^*T^* sík közös részén helyezkedik el, ez a négy pont tehát egy egyenesen van.

Függelék: Az inverzió alaptulajdonságai

Az inverzió egy geometriai transzformáció, síkban és térben is értelmezzük. Síkban a tengelyes, térben a síkra való tükrözéshez hasonlít, de a tengely helyett síkban egy körvonalra, térben egy gömbfelületre „tükrözünk".

A síkbeli inverzió definíciójához vegyünk fel egy O középpontú, r sugarú k kört; az O pont az inverzió középpontja vagy *pólusa;* a k lesz az inverzió *alapköre.* Bármely, O-tól különböző P pontra legyen P' az OP félegyenesnek az a pontja, amelyre $OP \cdot OP' = r^2$; ez a P' a P pont k-ra vonatkozó inverze vagy tükörképe. Az inverzió a sík O-tól különböző pontjait rendeli egymáshoz. Az világos, hogy P' inverze a P pont, és az alapkör pontjai önmaguk inverzei. Ezért is tekinthetjük a k kört egyfajta szimmetriatengelynek.

Bizonyítás nélkül felsoroljuk az inverzió néhány legfontosabb tulajdonságát. Ezek bizonyítása jó gyakorló feladat; hasonló háromszögekkel és az O pont különböző körökre vonatkozó hatványaival nem nehezek.

- Az O-n átmenő egyenesek képei (eltekintve az O ponttól) önmaguk.
- Ha egy egyenes nem megy át O-n, akkor az inverze egy O-n átmenő körvonal, és fordítva: az O-n átmenő körök képei O-ra nem illeszkedő egyenesek.
- Az O-t nem tartalmazó körvonalak képei O-t nem tartalmazó körvonalak.
- Az alapkört merőlegesen metsző körvonalak önmaguk képei.
- Az inverzió érintés-, merőleges- és általában szögtartó: ha a és b két egyenes vagy kör, amelyek az O-tól különböző P pontban α szögben metszik egymást, akkor képeik, a' és b' a P' pontban szintén α szögben metszik egymást.
- Az inverzió kettősviszonytartó: ha A, B, C, D négy pont egy egyenesen vagy körön, akkor $(A, B, C, D) = (A', B', C', D')$.
- Az inverzió szimmetriatartó: ha t egyenes vagy kör, P és Q egymás tükörképe t-re, akkor képeik, P' és Q' is egymás tükörképei t'-re.

A térbeli inverzió definíciója lényegében ugyanaz, csak kör helyett egy O középpontú, r sugarú gömbre invertálunk. Az O-n átmenő síkokon belül a fenti tulajdonságok érvényben maradnak.

- Az O-n átmenő egyenesek és síkok képei (eltekintve az O ponttól) önmaguk.

- Ha egy egyenes nem megy át O-n, akkor az inverze ugyanabban a síkban egy O-n átmenő körvonal, és fordítva: az O-n átmenő körvonalak képei O-ra nem illeszkedő egyenesek.
- Ha egy sík nem megy át O-n, akkor az inverze egy O-n átmenő gömbfelület, és fordítva: az O-n átmenő gömbfelületek képei O-ra nem illeszkedő síkok.
- Az O-t nem tartalmazó gömbfelületek képei O-t nem tartalmazó gömbfelületek.
- Az alapgömböt merőlegesen metsző gömbfelületek önmaguk képei.
- Az egyenesek és körvonalak inverzei is egyenesek vagy körvonalak.
- Az inverzió térben is szögtartó: ha a és b két egyenes, kör, sík vagy gömbfelület, amelyeknek van legalább egy, O-tól különböző pontjuk, és α szögben metszik egymást, akkor képeik, a' és b' szintén α szögben metszik egymást.
- Az inverzió szimmetriatartó: ha $\mathcal{S}$ sík vagy gömbfelület, P és Q egymás tükörképe $\mathcal{S}$-re, akkor képeik, P' és Q' is egymás tükörképei $\mathcal{S}'$-re.

A síkban és a térben is, a definícióban az r^2 helyére negatív számot is írhatunk. Az így módosított definícióban P' az OP egyenesnek az a pontja, amelyre $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OP'} = \lambda$; ha a λ paraméter pozitív, akkor P' és P az O-nak ugyanazon az oldalán, negatív λ esetén ellentétes oldalon vannak.

További olvasnivaló

Projektív transzformációkról és inverzióról ismét csak Reiman István *Geometria és határterületei* c. könyvét tudom ajánlani.

A bemutatott példákra sokféle más megoldás is létezik; néhányat megtaláltok ezeken a címeken:
https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=A594
https://www.komal.hu/feladat?a=feladat&f=A597
https://www.imo-official.org/problems/IMO2012SL.pdf, 38–41. oldal.

Feladatok

1. *a*) Igazoljuk az 1. példa állítását csupán a kerületi szögek tételének felhasználásával. Legyen az EG és FH szakaszok metszéspontja K, a beírt kör középpontja I, és I merőleges vetülete az AC átlón T. Mutassuk meg, hogy az E, F, K, T, valamint a G, H, K, T pontok is egy-egy körön vannak, és az AC átló átmegy a K ponton.

b) Igazoljuk az 1. példa állítását úgy, hogy felírjuk a Brianchon-tételt az $AEBCGD$ és $ABFCDH$ elfajuló érintőhatszögekre.

c) Igazoljuk az 1. példa állítását úgy, hogy felírjuk a Pascal-tételt az $EEGFFH, EGGFHH$, $EEFHHG$ és $EFFHGG$ elfajuló húrhatszögekre.

2. Az $ABCD$ érintőnégyszögben legyen PQ a beírt kör AC-re merőleges átmérője. Tegyük fel, hogy a BP és DQ egyenesek az X, a BQ és DP egyenesek az Y pontban metszik egymást. Mutassuk meg, hogy az X és Y pontok az AC egyenesen vannak. (International Olympiad of Metropolises, Moszkva, 2018/2)

3. Adott egy k kör és rajta kívül két pont, A és B. Az A-ból k-hoz húzott érintő szakaszok AC_1 és AC_2, a B-ből k-hoz húzott érintő szakaszok BD_1 és BD_2. Igazoljuk, hogy a C_1C_2 egyenes akkor és csak akkor megy át a B ponton, ha a D_1D_2 egyenes átmegy az A ponton. (Avagy, A polárisa akkor és csak akkor megy át B-n, ha B polárisa átmegy A-n.)

4. Igazoljuk, hogy ha két, egy síkban fekvő körnek nincs közös pontja, akkor van olyan inverzió, amely ezeket a köröket koncentrikus körökbe képezi.

5. Adott a térben két körvonal, k_1 és k_2 úgy, hogy a síkjaik metszik egymást. Mutassuk meg, hogy ha a két kört egymásra lehet vetíteni egy alkalmas O pontból, akkor a két körvonal egymás inverze egy O középpontú inverzió szerint.