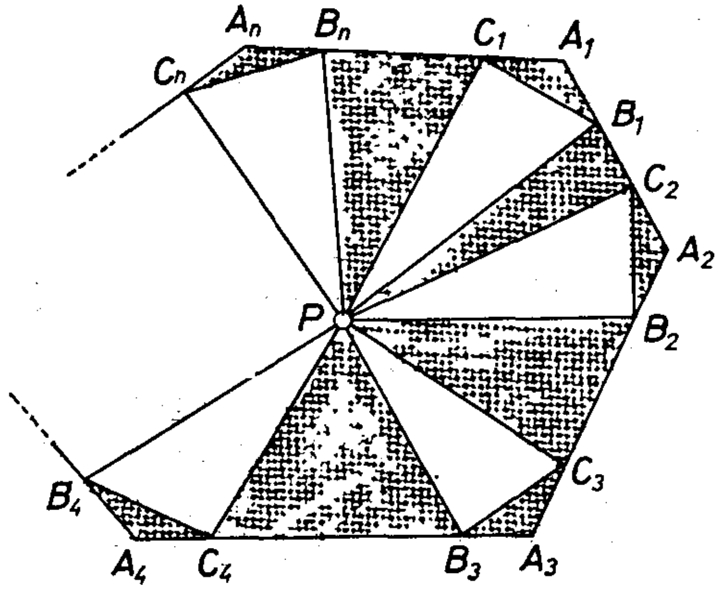
I. megoldás. Megmutatjuk, hogy a kívánt felbontás minden $n \geq 3$ értékre megvalósítható. Hozzátesszük mindjárt: abban az értelemben, hogy a részháromszögek csúcsai nemcsak az eredeti sokszög csúcsaiban lehetnek. (A feladat nem tartalmazott ilyen megkötést, azonban többen úgy értelmezték.)

Legyen a felbontandó $A_1A_2 \dots A_n$ konvex n-szög legkisebb oldalának $1/3$ része h, mérjük föl ezt minden csúcstól a szomszédos csúcsok irányába, és jelöljük a végpontot A_i-től a körüljárás irányában B_i-vel, az ellentétes irányban C_i-vel, $i = 1, 2, \dots n$ (1. ábra).



1. ábra

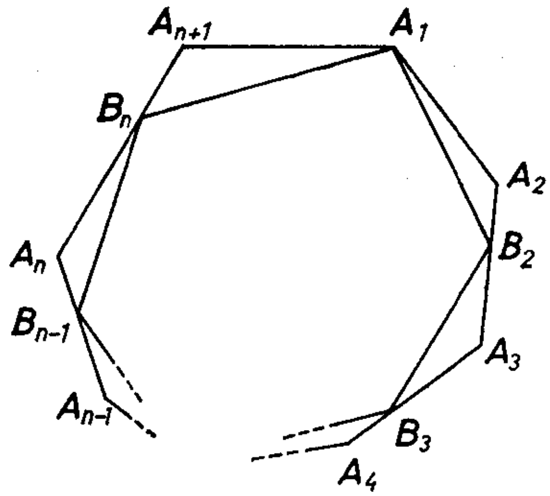
Az $A_iB_iC_i$ háromszögeket csak feketére festhetjük, a még festetlen konvex $2n$-szög C_iB_i oldalaira a felbontásban fehér (világos) háromszögeknek kell támaszkodniuk, a B_iC_{i+1} oldalaira pedig sötét háromszögeknek (C_{n+1}-en természetesen C_1-et értjük).

Ezt egy csapásra megvalósíthatjuk úgy, hogy mindezen pontokat összekötjük egy, a 2_n-szög belsejében választott P ponttal, és a keletkezett háromszögeket a C_iB_i, ill. B_iC_{i+1} oldalukra megállapított színűre festjük. – A felbontás és színezés nyilván megfelel az előírásnak. (A rész háromszögek száma itt $f_n = 3n$.)

Tranta Beáta (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o. t.)

II. megoldás. n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk az I. megoldásban kimondott állítást, továbbra is az ott kimondott értelmezéssel. $n = 3$ esetén a háromszöget feketére festve kapunk megfelelő megoldást.

Tegyük föl, hogy konvex n-szögre igaz az állításunk, tekintsük az $A_1A_2 \dots A_nA_{n+1} = P_{n+1}$ konvex $(n+1)$-szöget. Jelölje B_i az A_iA_{i+1} oldal egy belső pontját, $i = 2, 3, \dots, n$ (2. ábra).

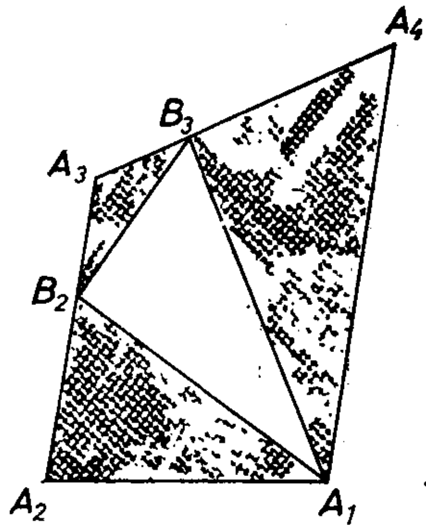


2. ábra

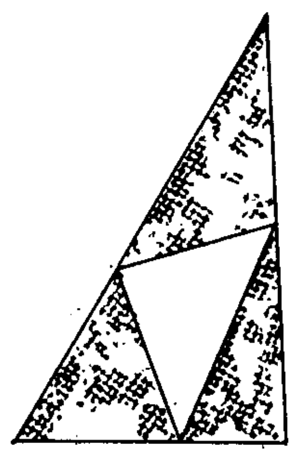
Ekkor az $A_1B_2B_3 \dots B_n = Q_nn$-szög konvex, bele van írva $P_n + 1$-be, csak csúcspontjai vannak P_{n+1} kerületén. Tekintsük Q_n-nek egy, az indukciós feltevés szerint létező felbontását, de cseréljük föl benne a fekete és a fehér színt. Végül P_{n+1}-nek a Q_n által le nem fedett részét feketére festve, a P_{n+1}-nek egy megfelelő felbontását kapjuk.

Eszerint minden konvex sokszög felbontható a kívánt módon. (P_{n+1} leírt kibontása a Q_n felbontásához képest n új háromszöget tartalmaz.)

Megjegyzések. 1. Kissé fonákul hat, hogy a teljes indukciós bizonyítás elindításában „1 részre bontunk”, amit így is lehet mondani: *nem* bontunk. Gyakori azonban, hogy ilyen bizonyításokban a kiindulás többé–kevésbé elfajult eset, vagy csak mesterkélt értelmezés mellett mutat példát. Az erre az $f_3 = 1$-re a fentiek szerint kialakított $f_4 = f_3 + 3 = 4$ felbontás azonban már valódi bontás (3. ábra), és ilyen $n = 3$-ra is van (4. ábra), ebben is $f_3 = 4$.



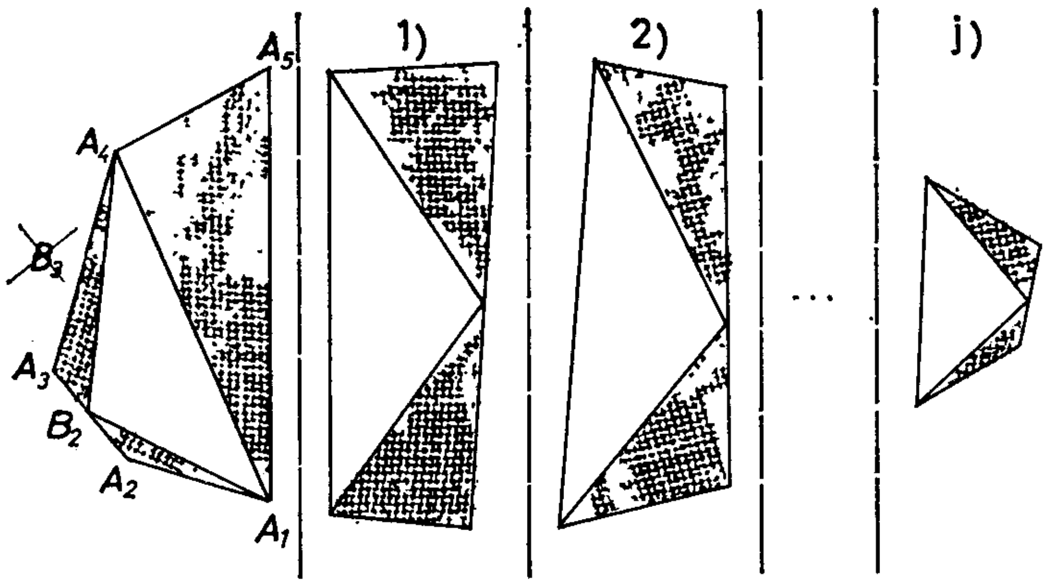
3. ábra


4. ábra

2. A továbbhaladásnak más természetű „szépséghibája”, hogy rohamosan nő n-nel az f_n szám, $f_{n+1} = f_n + n$ alapján $f_5 = 8, \ldots f_8 = 26 > 3 \cdot 8$ (amit az I. megoldásban láttunk). Márpedig „íratlan szépségideálja” számos feladattípusnak a lehetőleg kis létszám, a felépítés (a „konstrukció”) egyszerűsége.

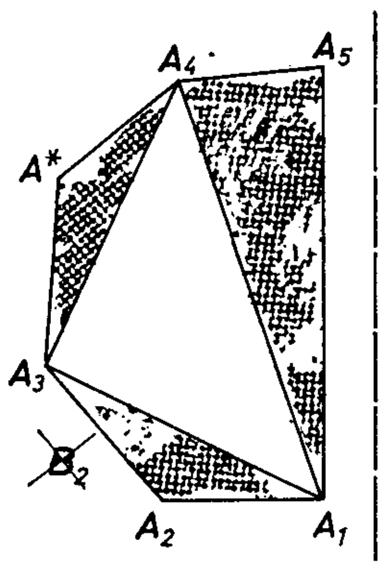
Mutathatunk azonban olyan módosítást, amelyben tetszetős végeredmény fejlődik ki szemeink előtt. Arra alapul ez, hogy az $n = 5$ és $n = 6$ esetekre az $n = 4$ eseténél egyre szebb olyan felbontások adhatók, még hozzá éppen a 3. ábrából, amelyekben $f_5 = f_6 = f_4 = 4$. Erre tekintettel közös továbbfejlesztés adható páratlan és páros n-ekre. Sőt ez is javítható lesz.

A 3. ábrán B_3-at A_4-be tolva elfajul a $B_3A_4A_1$ háromszög, fehér oldala keletkezik a négyszögnek, és erre egy fekete háromszöget illesztve, az $n = 5$ esetre kapunk megoldást (5. ábra, a szaggatott vonaltól balra eső rész). Az odarajzolt $A_1A_4A_5$ háromszöggel fenntarthatjuk a konvexséget; tovább is ilyen „odatapasztásokat” végzünk majd.



5. ábra

Még szebb az $n = 6$ eset: B_2-t A_3-ba toljuk és az elfajult háromszöget a fekete A_3A_4A*-gal pótoljuk (6. ábra), még mindig $f_6 = 4$, és minden eddigivel szemben kizárólag átlók révén való felbontás áll előttünk.

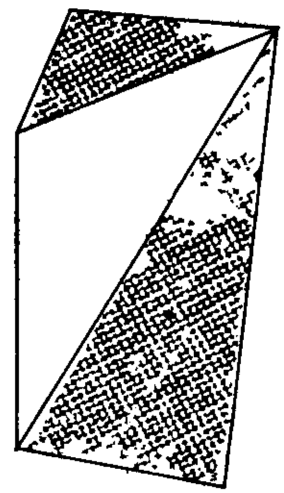


6. ábra

Nevezzük el most az 5. ábra $A_1A_2A_3A_4$ négyszögét *oldalszámnövelő tapasz*-nak, 3 oldala fekete, 1 fehér. Ennek ismételt odarajzolásával az 5–6. ábrákból (a szaggatott vonalon túl, de tulajdonképpen bármelyik szélső fekete háromszögön túl) egyformán kaphatunk felbontást–színezést az $n = 5 + 2j$ és $n = 6 + 2j$ esetekre, $j = 1, 2, \ldots$.

Minden egyes ilyen tapasz 2 új csúcsot hoz be a „felbontandó” sokszögbe, így a felbontások háromszögeinek száma $f_{5+2j} = f_{6+2j} = 4 + 3j$, ahol $2j = n - 5$, ill. $2j = n - 6$.

Már csak annak észrevétele van hátra, hogy képezhető 4-nél több oldalú oldalszámnövelő tapasz is, sőt az 5 oldalú tapasz „szebb”, mint a 4 oldalú (7.ábra), mert kizárólag átlók útján bont. Emiatt nem is érdemes már másra gondolni.



7. ábra

Most már a 3., 5. és 6. ábrák ilyen továbbfejlesztésére gondolunk, minden tapasz 3 új csúcsot hoz és 3 új háromszöget, mindig

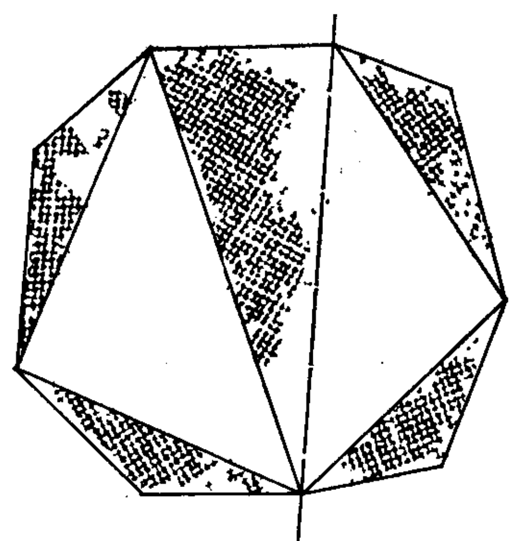
$$f_n = f_{4+3j} = f_{5+3j} = f_{6+3j} = 4 + 3j,$$

innen $3j = n - 4$, ill. $n - 5$, ill. $n - 6$

$$f_n = \begin{cases} n, & \text{ha} \quad n = 3k+1 \text{ alakú}, \\ n-1, & \text{ha} \quad n = 3k+2 \text{ alakú}, \\ n-2, & \text{ha} \quad n = 3k \text{ alakú}. \end{cases}$$

Az $f_{3k} = 3k - 2$ eredmény semmi esetre sem javítható, hiszen a $3k$-szög (belső) szögeinek összege $(3k-2) \cdot 180°$, és minden belső szögnek egészben vagy részekre bontva ott kell lennie a részháromszögek szögeinek együttesében.

A 8. ábra $n = 9$-re mutatja az előzőek szerinti felbontást, ez 7 rész. (Szabályos 9-szögre ez az egyetlen ilyen felbontás,[1] a szabályos 12-szög ilyen feldarabolásainak száma[2] pedig 4. A szabályossággal persze már méretes és szimmetriaviszonyokat is tekintetbe vettünk.)



8. ábra

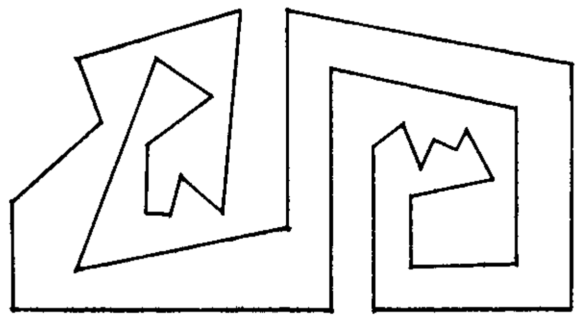
3. Egy $3k$ oldalszámú konvex sokszögnek a legutóbbiak szerinti, *kizárólag átlók révén* való felbontásáról az is kimondható, hogy minden csúcsa páratlan sok részháromszögnek csúcsa, hiszen a csúcsokban a háromszögek váltakozva feketék és fehérek, és az utolsó is fekete, vagy pedig csakis 1 fekete háromszög tartozik a csúcshoz.

Itt kapcsolódunk a feladat szövegének mikénti értelmezéséhez, amelyet már említettünk az I. megoldás elején. *Kizárólag átlókat* felhasználva a bontásban – és persze egymást nem metsző átlókat, különben ugyanis nem tekinthető

[1] K.M.L. 1174. gyakorlat, 37 (1968), 12. o.
[2] 1326. gyakorlat. K.M.L. 42 (1971) 166. o.

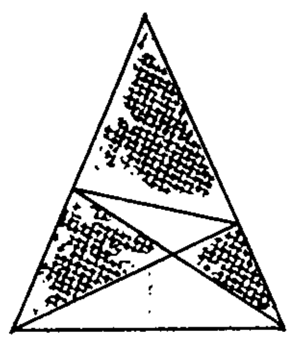
át a részek alakja –, csak az $n = 3k$ oldalszámú konvex sokszögeknek van a feladat kimondott követelményeit kielégítő felbontása - színezése. – Ez azonban nem a fentiekből következik. Egyébként az 1967. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny 2. feladata ez volt: „Egy konvex sokszöget egymást nem metsző átlók háromszögekre bontanak fel. A sokszög minden csúcsa páratlan sok ilyen háromszög csúcsa. Bizonyítsuk be, hogy a sokszög oldalainak száma 3-mal osztható."[3]

4. Többen kimondták a következő sejtést: a nem konvex n-szögekre vonatkozó hasonló problémára is igenlő a válasz, ha nem metszik át önmaguk kerületét. A megnyugtató bizonyítás azonban nehéz lenne. A fentiekben megfordíthatónak tekintettük a „tapasz–eljárást", de nem konvex sokszögnél akár sok–sok ide–oda kanyarodás is lehetséges, áttekinthetetlen a sok lehetőség (9. ábra); maradjunk annál, hogy ez *sejtés.* (Vö. a sík lefedését egy bizonyos fajta nemkonvex 9-szög egybevágó példányaival, Gy. 1898.[4])



9. ábra

5. Felbontható egy háromszög úgy is, hogy két oldalához fekete, egyhez fehér háromszög csatlakozzék (10. ábra). Ilyen elemekből is összerakható az n-szög felbontása.



10. ábra

[3]Lásd a megoldást: Hajós György: Az 1967. év Kürschák József matematikai tanulóverseny feladatainak megodása, K.M.L. 36 (1968) 193 – 202. oldal. A kapcsolódó megjegyzésekben többféle kiegészítés olvasható a tételhez.

[4]K.M.L. 61 (1980) 147-149. oldal és borítólap.