A racionális számok tizedestört alakja *szakaszos.* Ezen azt kell érteni, hogy minden racionális számhoz található olyan k és p egész szám, hogy tizedestört alakjukban a tizedesvessző utáni k-adik jegytől kezdve a számjegyek p-esével ismétlődnek. Más szóval minden $i \geq 0$ egészre a $k+i$ és $k+i+p$ sorszámú helyeken egyező számjegyek állnak. A legkisebb ilyen p-t nevezzük a tizedestört *periódusának.* (Ha a tizedestört véges, akkor úgy gondoljuk, hogy a végén csupa 0 szerepel. Az ilyen tizedestörtek periódusa 1.)

Lássuk be először, hogy ez valóban így van! Gondoljuk csak el, hogyan állítjuk elő a $0 < p_1/q < 1$ racionális szám tizedestört alakját. A tizedesvessző utáni első jegy a 10 p_1:q osztás egész része, legyen a maradék p_2. A második jegy a 10 p_2:q osztás egész része, a maradék p_3 stb. Mivel a $p_2, p_3 \dots$ maradékok mind kisebbek q-nál, ezért valamelyik maradék előbb-utóbb másodszor is fellép, és innen kezdve a maradékok – s ezért a tizedesjegyek is – periodikusan ismétlődnek. Láthatjuk azt is, hogy a szakasz hossza, azaz a tizedestört periódusa, legfeljebb annyi, ahány különböző maradék az osztás során felléphet, vagyis legfeljebb $q-1$.

Mivel irracionális számot kell megadnunk, az előbbiek alapján elegendő egy nem szakaszos, a feltételeket kielégítő tizedestörtet készítenünk. Állítjuk, hogy az alábbi szám ilyen:

$$0{,}01 \quad 01 \quad 001 \quad 0101 \quad 001 \quad \dots \quad 001 \quad \underbrace{01\dots01}_{n \text{ darab } 01} \quad 001 \quad \underbrace{01\dots01}_{n+1 \text{ darab } 01} \quad 001 \quad \dots$$

Azt kell csak ellenőriznünk, hogy nem szakaszos, a többi feltétel nyilvánvalóan teljesül. Tegyük fel, hogy mégis szakaszos, vagyis a k-adik helytől kezdve az egymástól p távolságra levő jegyek megegyeznek. Legyen n nagyobb k-nál és p-nél is. Ekkor az n darab 01-ből álló $01\dots01$ „blokkot" megelőző 001 sorozat első és második 0 jegyétől p hellyel hátrább szintén 0 áll. Tehát $n > p$ miatt a „blokkban" két szomszédos 0 lenne, ami ellentmondás. A megadott tizedestört tehát irracionális számot definiál, s ezzel a feladatot megoldottuk.

Megjegyzések. 1. Azt igazoltuk, hogy a nem szakaszos tizedestörtek irracionális számot definiálnak. Nem bizonyítottuk, de igaz, hogy a szakaszos tizedestörtek viszont mindig racionális számok.

2. A vizsgált számokban minden 1-es után egy vagy két 0 következik. Ha a tizedes vessző előtt közvetlenül 1-es áll, akkor a szám tizedes vessző utáni része egyértelműen jellemezhető azzal, hogy sorban megmondjuk az 1-esek utáni 0-k számát. Így ismét végtelen sorozatot kapunk, amelynek két lehetséges eleme van: az egy és a kettő. Megfordítva, bárhogyan mond valaki egymás után végtelen sok szót, amelyek mindegyike vagy az „egy" vagy a „kettő", szövege alapján felírhatunk egy számot, amelyben a tizedes vessző előtt egyetlen 1-es áll, ezt követően a szöveg első szava által megadott számú 0, utána egy 1-es, majd sorra mindig annyi 0-t írunk, amennyit a szöveg következő szava jelent, és utánuk mindig egyetlen 1-est írunk. Azt is megtehetnénk persze, hogy amikor a szövegben „egy" hangzik el, akkor egy darab 0-t írunk, és amikor „kettő", akkor egy darab 1-est. Az így kapott számot tekinthetjük a kettes számrendszer számának: irracionális számoknak a kettes számrendszerbeli alakja sem periodikus. Így tehát tetszőleges irracionális szám kettes számrendszerbeli alakjából megfelelő példát konstruálhatunk. Azt kellene már csak belátni, hogy ha az $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ végtelen sorozat elemei egymástól függetlenül vagy 0-val vagy 1-gyel egyenlőek, és a sorozat nem periodikus, akkor rendre $(\varepsilon_n + 1)$ darab 0 után mindig egyetlen 1-est írva ugyancsak nem periodikus sorozatot kapunk.