I. rész

1. Dani kerékpárversenyre készül. Először hegynek felfelé, utána vízszintes terepen, majd lejtőn lefelé hajtja a biciklit, ezután visszafelé ugyanezen az útvonalon hajt végig. Lejtőn lefelé 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, vízszintes terepen 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, míg hegynek felfelé 20 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ állandó sebességgel képes haladni. Az odafele utat 1,75 óra alatt, míg a visszafele utat 2,25 óra alatt tette meg. Milyen hosszúak az egyes útszakaszok, ha oda-vissza összesen 130 km-t biciklizett?

(Közben sehol sem állt meg, a visszafordulás időveszteség nélkül zajlódik le.)

(13 pont)

2. Tekintsük a következő állításokat.

A: Meg tudunk úgy adni végtelen sok prímet, hogy bármely kettő összege ne legyen prím.

B: Ha az a_n^2 sorozat konvergens, akkor a_n is konvergens.

C: Ha öt különböző természetes szám összege osztható öttel, akkor öttel osztva különböző maradékot adnak.

a) Döntsük el, hogy igazak vagy hamisak az állítások. Válaszainkat indokoljuk.

(8 pont)

b) Fogalmazzuk meg a C állítás megfordítását. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás megfordítása. Válaszunkat indokoljuk. *(4 pont)*

3. *a*) Döntsük el, hogy az implikáció asszociatív művelet-e, azaz tetszőleges A; B; C kijelentések esetén fennáll-e, hogy $(A \to B) \to C = A \to (B \to C)$. *(4 pont)*

b) Határozzuk meg azon $P(x;y)$ pontok halmazát a derékszögű koordinátarendszerben, amelyek koordinátáira igaz, hogy $PA^2 + PB^2 = 22$, ahol $A(1;2)$ és $B(3;0)$.

(8 pont)

4. Legyen A a $2^x + 2^{1-x} \le 3$ egyenlőtlenség megoldáshalmaza, B pedig az alábbi két függvény értékkészletének közös része:

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \sin(2019\pi x) \quad \text{és} \quad g(x) = 4x^2 - 4x + \frac{3}{2}.$$

a) Határozzuk meg az A halmazt. *(5 pont)*

b) Határozzuk meg a megadott függvények értékkészletét és a B halmazt.

(7 pont)

c) Hány eleme van az $(A \setminus B) \cap \mathbb{Z}$ halmaznak, ahol $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát jelöli? *(2 pont)*

II. rész

5. *a*) Egyik este Anna, Bea, Csilla, Dóra és Emese elmentek vacsorázni a közeli pizzázóba. Mindannyian másféle pizzát rendeltek. A pincér még új, így a rendelt ételeket véletlenszerűen osztotta ki a lányoknak (de azokat hozta ki, amiket rendeltek). Jelölje X azt a valószínűségi változót, amely azt adja meg, hogy hányan kapták a saját rendelésüket. Határozzuk meg X várható értékét. *(8 pont)*

b) Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív egész számok halmazán:

$$2^n - 1 = m^2.$$ *(8 pont)*

6. *a*) Egy derékszögű háromszög beírt és köré írt körének sugarát jelölje r és R. Mekkorák a háromszög oldalai, ha tudjuk, hogy $r + R = 31$ és $rR = 150$? *(8 pont)*

b) Egy szabályos ötszög mindegyik oldalát kiszínezzük három adott szín valamelyikével. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha két színezést nem tekintünk különbözőnek, ha forgatással egymásba vihetők? *(8 pont)*

7. *a*) A lappföldi Mikulásnak két rénszarvasa van: Vágta és Éppenhogycsak. Ha valamelyik nap Vágta egyedül x sebességgel ($x > 1$) húzná a szánt, akkor Éppenhogycsakot melléfogva az még $1/x$ sebességet tud hozzáadni. A Mikulás már öreg, emiatt ijedős. Minél gyorsabban megy a szán, annál többször fogja vissza az állatokat. A precíz mérések szerint, ha Vágta x sebességgel húzná a szánt, akkor ez éppen $\ln x$ sebességcsökkenést eredményez. Egyszer egy ellenőrzésnél azzal vádolják meg a Mikulást, hogy lassan hajtott. Lappföldön a lassúhajtás határa 7/4. Meg tudja-e védeni magát a Mikulás?

(Használjuk fel, hogy $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.) *(9 pont)*

b) A sakk egy érdekes változata az ún. Fischer random sakk, melyet Robert Fischer amerikai világbajnok hozott létre 1996-ban. A lényegi eltérés a tisztek (király (K), vezér (V), 2 bástya (B), 2 huszár (H), 2 futó (F)) elhelyezkedésében rejlik.

Az alapállás szabályai:

- A király a bástyák között foglal helyet.
- A futók ellentétes színű mezőn állnak.

A felsorolt tiszteket az alábbi 1×8-as táblázatba kell elhelyezni (az *ábrán* egy helyes kitöltés látható):

F	**H**	**B**	**F**	**H**	**K**	**B**	**V**

Az azonos minőségű tisztek között (pl. két huszár stb.) csak a futóknál van megkötés arra, hogy szükségszerűen különböző színen kell állniuk.

Mutassuk meg, hogy 960 megengedett alapállás lehetséges a Fischer random sakkban. (*7 pont*)

8. *a*) Egy tizenkét elemű, egész számokból álló mintából ismerünk hét értéket: 4; 4; 4; 5; 7; 9; 13. Tudjuk, hogy a minta egyetlen módusza 5 és a minta átlagának szórás sugarú környezete három tizedesjegyre kerekítve $]\bar{x}-\sigma; \bar{x}+\sigma[\, = \,]3{,}292; 8{,}708[$. Határozzuk meg a minta hiányzó öt elemét. (*8 pont*)

b) Egyenlő szárú háromszög szára 13 cm, alapja 24 cm. Számítsuk ki a háromszög súlypontjának a háromszög köré írható kör középpontjától való távolságát.

(*8 pont*)

9. *a*) Bence nemrég tanulta az iskolában a szinusztételt és a koszinusztételt. Sajnos rosszul emlékezett rájuk és azokat az alábbi módon jegyezte meg (a jelölések a szokásosak):

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \sin\gamma \quad \text{és} \quad \frac{a}{b} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Mekkorák annak a háromszögnek a szögei, amelyre igazak a Bence által megtanult összefüggések? (*7 pont*)

b) Határozzuk meg az a; b; c egész paraméterek értékét úgy, hogy az $f(x) = ax^2 + bx + c$ egyenletű parabola az alábbi feltételek mindegyikét teljesítse.

1. $f'(3) = -11$.
2. $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$.
3. Csúcspontja illeszkedik az $y = \frac{1}{2}x + 1$ egyenletű egyenesre. (*9 pont*)