1. Legyenek egy háromszög oldalai $a \le b \le c$. Határozzuk meg az $\dfrac{(a+b+c)^2}{b \cdot c}$ lehető legjobb alsó és felső korlátját. Milyen háromszög esetén veszi fel a kifejezés ezeket az értékeket?

2. Az $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{2^n}$ számsorozat minden elemének abszolút értéke 1. Képezzük ezekből az $a_1 \cdot a_2,\ a_2 \cdot a_3,\ \ldots,\ a_{2^n} \cdot a_1$ sorozatot, majd ebből ugyanilyen módon újabbat. Mutassuk meg, hogy legfeljebb 2^n lépésben olyan sorozathoz jutunk, melynek minden eleme 1.

3. Adott n darab 1 abszolút értékű szám: $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$. Bizonyítsuk be, hogy

$$2\sin\Big[\frac{\pi}{4}\Big(a_1 + \frac{a_1a_2}{2} + \frac{a_1a_2a_3}{2^2} + \frac{a_1a_2\ldots a_n}{2^{n-1}}\Big)\Big] = a_1\sqrt{2 + a_2\sqrt{2 + \cdots + a_n\sqrt{2}}}.$$

4. Mutassuk meg, hogy bármilyen $n \ge 4$ egész számra $n!$ és $(n+1)!$ között mindig van legalább egy olyan egész szám, amely n^3-nal osztható!

5. Az $a_1,\ a_2\ \ldots$ számsorozatot a következő rekurzív formulával definiáljuk:

$$a_1 = A, \quad a_2 = B, \quad a_n = \frac{a_{n-1}^2 + C}{a_{n-2}} \quad (n > 2).$$

Bizonyítsuk be, hogy ha $A,\ B$ és $\dfrac{A^2+B^2+C}{A \cdot B}$ egész számok, akkor a sorozat minden tagja egész szám!

6. Mutassuk meg, hogy a $9kx^2(x-1) + t(9x-1) = 0$ egyenlet gyökei ($k \ne 0,\ k$ és t valós számok) nem lehetnek egymástól különböző pozitív valós számok!

7. Adott a térben $2n\ \ (n > 1)$ darab különböző pont, közülük semelyik négy nincs egy síkban. Tekintsük a pontok által meghatározott szakaszokat. Mutassuk meg, ha kiválasztunk közülük legalább (n^2+1)-et, akkor mindig lesz legalább 3 különböző pont, amelyek közti mindhárom szakasz a kiválasztottak között van. Mutassuk meg, hogy az állítás (n^2+1)-nél kevesebb szakasz kiválasztása esetén nem mindig teljesül!

8. Minden $0 < \dfrac{p}{q} < 1$ racionális számra (p és q relatív prím egészek) tekintsük a $\Big(\dfrac{p}{q} - \dfrac{1}{4q^2}\Big),\ \Big(\dfrac{p}{q} + \dfrac{1}{4q^2}\Big)$ intervallumot. Mutassuk meg, hogy $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ezek egyikéhez sem tartozik hozzá!

9. Legyen S a racionális számoknak egy olyan részhalmaza, amelyre

(1) ha $a,\ b \in S$, akkor $a + b \in S$ és $a \cdot b \in S$;

(2) bármely racionális r esetén az $r \in S$, $-r \in S$, $r = 0$ közül pontosan az egyik teljesül.

Bizonyítsuk be, hogy S éppen a pozitív racionális számok halmaza!

10. Legyenek $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ a_{n+1}$ valós számok, továbbá $a_0 = a_{n+1} = 0$. Mutassuk meg, hogy van olyan $0 \le k < n$ természetes szám, hogy bármely $a_{k+1} + \cdots + a_r\ \ (k+1 \le r \le n+1)$ részösszeg nem negatív, és bármely $a_k + a_{k-1} + \cdots + a_s\ \ (0 \le s \le k)$ részösszeg nem pozitív!