1. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszert:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481,$$
$$x^2 + xy + y^2 = 37.$$

(13 pont)

2. Egy egyenes folyópart mentén egy téglalap alakú területet kerítünk be három oldalról. (A téglalap egyik oldala a folyópart, s ez kerítetlen marad.) Maximálisan mekkora terület keríthető be, ha n számú 1 méteres kerítéselem áll rendelkezésünkre?

(15 pont)

3. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan x valós szám, amelyre

$$\sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = 1.$$

(14 pont)

4. Az $F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ $(i = 1,\ 2,\ 3, \ldots)$ rekurzív definícióval megadott sorozatot Fibonacci-sorozatnak nevezik. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív n szám egyértelműen előállítható

$$n = F_{i_1} + F_{i_2} + \ldots F_{i_k}$$

alakban, ahol $i_1 > i_2 + 1,\ i_2 > i_3 + 1, \ldots\ i_{k-1} > i_k + 1,\ i_k > 1.$

(18 pont)