

Az a, b, c pozitív egész számokból alkotott $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ kifejezést jelöljük K -val. A továbbiakban feltesszük, hogy $a \leq b \leq c$.

Először bebizonyítjuk, hogy K értéke nem lehet $9/11$. Mivel $a \geq 4$ esetén $K \leq 3/4 < 9/11$, elég azokat az eseteket megvizsgálnunk, amelyekben $a \leq 3$.

1. $a = 1$ nem lehet, mivel $9/11$ kisebb 1-nél.

2. $a = 2$ esetén $b > 2$ kell legyen. Ha $b = 3$, akkor mára $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{9}{11}$, ha $b = 4, 5$ ill. 6 , akkor c -re nem egész érték $\left(\frac{44}{3}, \frac{110}{13}, \text{ ill. } \frac{33}{5}\right)$ adódik. Ha $b \geq 7$, akkor $K \leq 11/15 < 9/11$, ezért ebben az esetben sincs megfelelő számhármast.

3. Végül ha $a = 3$, akkor $b = 3$, ill. 4 esetén c ismét törtszám lenne $(33/5, \text{ ill. } 132/31)$, $b \geq 5$ esetén pedig $K \leq 11/15 < 9/11$.

Minden esetet megvizsgáltunk, és egyik esetben sem találtunk megfelelő számhármast. A feladat első részében kimondott állítást ezzel bebizonyítottuk.

Vizsgáljuk meg ezek után a feladat második részében feltett kérdést. Ha $a \geq 3$, akkor K értéke $a = b = c = 3$ esetén 1-gyel egyenlő, $b \geq 3, c > 3$ esetén viszont már csak legfeljebb $11/12$, ami kisebb $41/42$ -nél. Mivel $a = 1$ sem lehetséges, a fennmaradó lehetőség $a = 2$. Ekkor $b \geq 3$. Ha $b = 3$, akkor K értéke $c \leq 6$ esetén legalább 1, $c \geq 7$ esetén pedig legfeljebb $41/42$. Ha $b = 4$, akkor $c = 4$ esetén $K = 1$, $c \geq 5$ esetén $K \leq 19/20 < 41/42$. Ha $b \geq 5$, akkor $K < 9/10 < 41/42$.

Több eset nem lévén, megállapíthatjuk, hogy a reciprokösszeg értéke nem eshet $41/42$ és 1 közé. (L. L.)

Dzvonjár Péter (Budapest, Könyves K. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. $41/42$ és 1 már előállítható a kívánt módon, hiszen

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$$

ill.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1.$$